

## Lösungen zum 3. Tutorium VU Statistische Physik I, 13.4.2018

### 1. Van-der-Waals-Gas

a) Die freie Energie des Van-der-Waals-Gases sei gegeben durch

$$F(T, V, N) = -k_B T \ln \left( \frac{(V - bN)^N}{N! \lambda^{3N}} \right) - \frac{aN^2}{V}$$

mit  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{cT}}$ . Berechnen Sie daraus die thermische Zustandsgleichung  $p = p(T, V, N)$  und die kalorische Zustandsgleichung  $E = E(T, V, N)$ .  
**Tipp:** Verwenden Sie die Stirling-Formel  $N! \simeq N^N e^{-N}$ .

*Lösung:* Die Stirling Formel liefert:

$$F(T, V, N) \simeq -Nk_B T \ln \left( \frac{V - bN}{N\lambda^3} \right) - \frac{aN^2}{V} - Nk_B T.$$

Die Ableitung nach  $V$  ergibt

$$p = - \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T, N} = \frac{Nk_B T}{V - bN} - \frac{aN^2}{V^2}$$

und nach  $T$

$$S = - \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V, N} = Nk_B \ln \left( \frac{V - bN}{N\lambda^3} \right) + \frac{5}{2} Nk_B.$$

Daraus folgt

$$E(T, V, N) = F(T, V, N) + S(T, V, N)T = \frac{3}{2} Nk_B T - \frac{aN^2}{V}$$

b) In einem Prozess wird  $X = TV$  konstant gehalten. Berechnen Sie die zugehörige Wärmekapazität  $C_X = \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_{X, N}$  des Van-der-Waals-Gases.

*Lösung:* Die zugehörige Wärmekapazität  $C_X$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} C_X &= \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_{X, N} = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_{X, N} + p \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_{X, N} \\ &= \frac{3}{2} Nk_B + \left( \frac{aN^2}{V^2} + p \right) \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_{X, N} = \frac{3}{2} Nk_B + \frac{Nk_B T}{V - bN} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_{X, N} \\ &= \frac{3}{2} Nk_B - \frac{Nk_B T}{V - bN} \frac{V}{T} = Nk_B \left( \frac{3}{2} - \frac{V}{V - bN} \right). \end{aligned}$$

- c) Am kritischen Punkt  $(p_c, T_c, V_c)$  ist die Taylor Entwicklung der Van-der-Waals Gleichung gegeben durch

$$\tilde{p} = 4\tilde{T} - 6\tilde{T}\tilde{V} - \frac{3}{2}\tilde{V}^3,$$

wobei die reduzierten Größen  $\tilde{p} = \frac{p}{p_c} - 1$ ,  $\tilde{T} = \frac{T}{T_c} - 1$ ,  $\tilde{V} = \frac{V}{V_c} - 1$  eingeführt wurden. Berechnen Sie daraus die Verdampfungswärme (latente Wärme)  $\Delta Q$  für die gilt

$$\frac{\Delta Q}{T} = S(T, V_{\text{gas}}, N) - S(T, V_{\text{liquid}}, N).$$

**Tipp:** Berechnen Sie  $V_{\text{gas}}$  und  $V_{\text{liquid}}$  mithilfe der Maxwell-Konstruktion.

*Lösung:* Mit der Entropie des Van-der-Waals-Gases

$$S = - \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V,N} = Nk_B \ln \left( \frac{V - bN}{N\lambda^3} \right) + \frac{5}{2}Nk_B$$

gilt für die Verdampfungswärme

$$\Delta Q = Nk_B T \ln \left( \frac{V_{\text{gas}} - bN}{V_{\text{liquid}} - bN} \right) = Nk_B T \ln \left( \frac{3\tilde{V}_{\text{gas}} + 2}{3\tilde{V}_{\text{liquid}} + 2} \right).$$

Um die beiden Volumina zu berechnen, verwenden wir die Maxwell-Konstruktion der Isothermen

$$\tilde{p}(\tilde{V}_g - \tilde{V}_l) = \int_{\tilde{V}_l}^{\tilde{V}_g} \tilde{p} d\tilde{V} = 4\tilde{T}(\tilde{V}_g - \tilde{V}_l) - 3\tilde{T}(\tilde{V}_g^2 - \tilde{V}_l^2) - \frac{3}{8}(\tilde{V}_g^4 - \tilde{V}_l^4)$$

weitere muss gelten

$$\tilde{p} = 4\tilde{T} - 6\tilde{T}\tilde{V}_g - \frac{3}{2}\tilde{V}_g^3$$

und

$$\tilde{p} = 4\tilde{T} - 6\tilde{T}\tilde{V}_l - \frac{3}{2}\tilde{V}_l^3.$$

Zieht man die letzten beiden Gleichungen von einander ab erhält man

$$\tilde{p}(\tilde{V}_g - \tilde{V}_l) = 4\tilde{T}(\tilde{V}_g - \tilde{V}_l) - 6\tilde{T}(\tilde{V}_g^2 - \tilde{V}_l^2) - \frac{3}{2}(\tilde{V}_g^4 - \tilde{V}_l^4)$$

und daher

$$3\tilde{T}(\tilde{V}_g^2 - \tilde{V}_l^2) + \frac{9}{8}(\tilde{V}_g^4 - \tilde{V}_l^4) = 0.$$

Diese Gleichung kann nur erfüllt sein wenn  $\tilde{V}_l = \pm\tilde{V}_g$  und da beide Volumen abseits des kritischen Punktes nicht gleich sein können gilt  $\tilde{V}_l = -\tilde{V}_g$ . Daraus folgt  $\tilde{p} = 4\tilde{T}$  weitere  $\tilde{V}_g = 2\sqrt{-\tilde{T}}$ . Für die Verdampfungswärme erhalten wir demnach

$$\Delta Q = Nk_B T \ln \left( \frac{1 + 3\sqrt{1 - T/T_c}}{1 - 3\sqrt{1 - T/T_c}} \right).$$

## 2. Phasenraum

- a) Ein Teilchen der Masse  $m$  bewege sich eindimensional und reibungsfrei in einer Box der Länge  $L$ . Schreiben Sie die Hamilton-Funktion  $H(q, p)$  an und skizzieren Sie Phasenraumtrajektorien zu unterschiedlichen Energien.

*Lösung:* Die Hamiltonfunktion ist gegeben durch

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

mit

$$V(q) = \begin{cases} 0 & |q| \leq \frac{L}{2} \\ \infty & |q| > \frac{L}{2}. \end{cases}$$

Die Trajektorien im Phasenraum sind Quadrate mit Länge  $L$  und Höhe  $2\sqrt{2mE}$ .

- b) Ein Teilchen der Masse  $m$  bewege sich reibungsfrei in einer dreidimensionalen Box mit Volumen  $L^3$ . Berechnen Sie das von der Bedingung  $H(\vec{q}, \vec{p}) = E$  eingeschlossene Volumen im Phasenraum

$$\Phi(E) = \int_{H \leq E} d^3q d^3p.$$

*Lösung:*

$$\begin{aligned} \Phi(E) &= \int_{H \leq E} d^3p d^3q \\ &= L^3 \int_{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \leq 2mE} dp_x dp_y dp_z \\ &= L^3 \frac{4\pi}{3} (2mE)^{3/2} \end{aligned} \quad (1)$$

- c) Berechnen Sie für drei Teilchen in einer Dimension das von der Bedingung  $H(q_1, p_1, q_2, p_2, q_3, p_3) = E$  eingeschlossene Volumen  $\Phi(E)$  im Phasenraum ( $\Gamma$ -Raum).

*Lösung:*

$$\begin{aligned} \Phi(E) &= \int_{H \leq E} dq_1 dq_2 dq_3 dp_1 dp_2 dp_3 \\ &= L^3 \int_{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \leq 2mE} dp_1 dp_2 dp_3 \\ &= L^3 \frac{4\pi}{3} (2mE)^{3/2} \end{aligned} \quad (2)$$

3. **Höhere Dimensionen** Berechnen Sie für  $N$  Teilchen in einer Box mit Volumen  $V$  das von der Bedingung  $H(\vec{q}_1, \vec{p}_1, \dots, \vec{q}_N, \vec{p}_N) = E$  eingeschlossene Volumen  $\Phi(E)$  im Phasenraum ( $\Gamma$ -Raum). **Tipp:** Das Volumen der  $n$ -dimensionalen Kugel ist gegeben durch

$$\int_{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 \leq R^2} d\xi_1 \dots d\xi_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} R^n.$$

*Lösung:*

$$\begin{aligned} \Phi(E) &= \int_{H \leq E} d^{3N}q d^{3N}p \\ &= V^N \int_{p_{1x}^2 + p_{1y}^2 + p_{1z}^2 + \dots + p_{Nx}^2 + p_{Ny}^2 + p_{Nz}^2 \leq 2mE} d^{3N}p \\ &= V^N \frac{\pi^{3N/2}}{\Gamma(\frac{3N}{2} + 1)} (2mE)^{3N/2} \end{aligned}$$

#### 4. Gleichgewicht

- a) Betrachten Sie zwei Teilchen in einer eindimensionalen harmonischen Falle mit Kreisfrequenz  $\omega$ . Teilchen 1 habe Energie  $E_1 = E + \Delta E$  und Teilchen 2 habe Energie  $E_2 = E - \Delta E$ . Wie groß ist das von den beiden Bedingungen  $H(q_1, p_1) = E_1$  und  $H(q_2, p_2) = E_2$  eingeschlossene Phasenraumvolumen  $\Phi(E_1, E_2)$  im  $\Gamma$ -Raum des kombinierten System?

*Lösung:* Die Hamiltonfunktion ist  $H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$  und folglich mit der Heaviside-Funktion  $\Theta$

$$\begin{aligned} \Phi(E_1, E_2) &= \int \Theta(E_1 - H(q_1, p_1)) \Theta(E_2 - H(q_2, p_2)) dq_1 dq_2 dp_1 dp_2 \\ &= \int \Theta\left(E_1 - \frac{p_1^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q_1^2}{2}\right) dq_1 dp_1 \int \Theta\left(E_2 - \frac{p_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q_2^2}{2}\right) dq_2 dp_2 \\ &= \frac{4\pi^2}{\omega^2} E_1 E_2 = \frac{4\pi^2}{\omega^2} (E^2 - \Delta E^2) \end{aligned}$$

- b) Für welchen Wert von  $\Delta E$  wird  $\Phi(E_1, E_2)$  maximal?

*Lösung:* Für  $\Delta E = 0$

Zu kreuzen (online im **TUWEL**-Kurs zur LVA): 1ab/1c/2/3/4