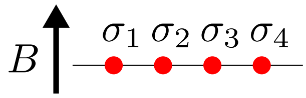
4. Tutorium VU Statistische Physik I, 4.5.2018



1. **Mikrokanonische Zustandssumme**

   Ein System bestehe aus vier magnetischen Dipolen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$, welche an vier diskreten Punkten $i = 1, 2, 3, 4$ lokalisiert seien. Das magnetische Moment jedes Dipols kann nur die beiden diskreten Werte $\sigma_i \in \{-\mu, +\mu\}$ annehmen. Mit dem Magnetfeld B lautet die Hamiltonfunktion des Systems

   $$H = -B \sum_{i=1}^{4} \sigma_i.$$

   a) Bestimmen Sie alle möglichen Werte der Gesamtenergie E, sowie die mikrokanonische Zustandssumme Ω für jede dieser Energien. Für welchen Energiewert ist die Entropie des Systems am größten?

   b) Dieses System sei nun mit einem weiteren System aus drei magnetischen Dipolen im thermischen Kontakt. Wie lautet die mikrokanonische Zustandssumme des Gesamtsystems zur Energie $E = 3\mu B$.

   c) Wenn jeder Mikrozustand zur Energie $E = 3\mu B$ gleich wahrscheinlich ist, welche Energieaufteilung zwischen den beiden Systemen ist dann am wahrscheinlichsten?

2. **Gleichgewicht**

   In einem abgeschlossenen Gesamtsystem befinde sich ein ideales Gas mit Teilchenmasse m, Energie E, Volumen V und Teilchenzahl N, welches durch eine unbewegliche, wärmeleitende Trennwand in zwei Teilsysteme geteilt wird. Insgesamt gilt $E = E_1 + E_2$, $V = V_1 + V_2$ und $N = N_1 + N_2$.

   a) Berechnen Sie die mikrokanonische Zustandssumme des ersten und zweiten Teilsystems $\Omega_1(E_1, V_1, N_1)$, $\Omega_2(E_2, V_2, N_2)$ sowie des Gesamtsystems $\Omega(E, V, N)$.

   b) Zeigen Sie die folgende Relation

   $$\Omega(E, V, N) = \int_0^E \Omega_1(E_1, V_1, N_1)\Omega_2(E - E_1, V_2, N_2)dE_1.$$

   Hinweis: Sie können das Hauptresultat der Theorie der Betafunktionen

   $$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

   verwenden oder die Definition der mikrokanonischen Zustandssumme direkt einsetzten.

c) Die (normierte) Wahrscheinlichkeitsdichte das Gas im ersten Teilsystem bei der Energie E_1 zu finden ist gegeben durch

$$w(E_1) = \frac{\Omega_1(E_1, V_1, N_1)\Omega_2(E - E_1, V_2, N_2)}{\Omega(E, V, N)}.$$

Bestimmen Sie den wahrscheinlichsten Wert für E_1. Welcher Temperatur entspricht das in den beiden Teilsystemen?

d) Berechnen Sie für Helium die Entropie des Gesamtsystems für $N_1 = N_2 = 10^{23}$ und $V_1 = V_2 = 1\mathrm{m}^3$ bei der Gesamtenergie $E = 1000$ J. Wie vielen Mikrozuständen entspricht das? Berechnen Sie weiters die Entropie des ersten und des zweiten Teilsystems für den wahrscheinlichsten Wert der Energieaufspaltung.
Hinweis: Verwenden Sie $S = k_B \ln(\Omega) \overset{N\to\infty}{\simeq} k_B \ln(\Phi)$.

3. **Vorbereitung auf das kanonische Ensemble**

a) Zeigen Sie, dass jede Phasenraumdichte $\rho(\underline{q}, \underline{p}) = \rho\big(H(\underline{q}, \underline{p})\big)$ die nur von der Hamiltonfunktion $H(\underline{q}, \underline{p})$ abhängt stationär ist.

Gegeben ist eine normierte Wahrscheinlichkeitsverteilung $g(x, y) = \frac{1}{Z} e^{-a[f(x)+by]}$ mit kontinuierlichen reellen Variablen x und y.

b) Zeigen Sie, dass der Mittelwert von y gegeben ist durch

$$\langle y \rangle = -\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial b} \ln Z.$$

c) Zeigen Sie, dass der Mittelwert von $f(x)$ gegeben ist durch

$$\langle f(x) \rangle = -\frac{\partial}{\partial a} \ln Z - b\langle y \rangle.$$

Zu kreuzen (online im **TUWEL**-Kurs zur LVA): 1/2a/2b/2cd/3