# Lösungen zum 5. Tutorium VU Statistische Physik I, 18.05.2018

1. **Kanonische Zustandssumme**

   Das System aus vier magnetischen Dipolen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$, welches im 4. Tutorium behandelt wurde, sei nun in Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur $T$.

   a) Bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme $Z_\mathrm{k}$.

   **Lösung:**

   $$Z_\mathrm{k} = \sum_i \omega(E_i) e^{-\beta E_i} = e^{\beta 4B\mu} + 4e^{\beta 2B\mu} + 6 + 4e^{-\beta 2B\mu} + e^{-\beta 4B\mu} = \big(2\cosh(\beta B\mu)\big)^4$$

   b) Bestimmen Sie für alle Werte der Gesamtenergie $E_i$ die Wahrscheinlichkeit $w(E_i)$ das System bei dieser Energie zu finden sowie die mittlere Energie $\langle E \rangle$.

   **Lösung:**

   $$p(-4B\mu) = \frac{1}{Z_\mathrm{k}} e^{\beta 4B\mu} \qquad p(-2B\mu) = \frac{4}{Z_\mathrm{k}} e^{\beta 2B\mu} \qquad p(0) = \frac{6}{Z_\mathrm{k}}$$
   $$p(2B\mu) = \frac{4}{Z_\mathrm{k}} e^{-\beta 2B\mu} \qquad p(4B\mu) = \frac{1}{Z_\mathrm{k}} e^{-\beta 4B\mu}$$

   $$\langle E \rangle = \sum_i E_i\, p(E_i) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_\mathrm{k} = -4B\mu \tanh(\beta B\mu)$$

   c) Berechnen Sie die mittlere Magnetisierung $\langle M \rangle$ im Grenzfall großer Temperaturen. Woher kennen Sie diesen Zusammenhang?

   **Lösung:**

   $$\langle M \rangle = \sum_i M_i\, p(E_i) = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial B} \ln Z_\mathrm{k} = 4\mu \tanh(\beta B\mu) \overset{T\to\infty}{\simeq} 4\mu^2 B\beta \propto \frac{B}{T}$$

   Entspricht dem Curie Gesetz des Paramagnetismus.

2. **Ideales Gas in harmonischer Falle**

   Ein ideales Gas in einer harmonischen Falle mit Kreisfrequenz $\omega$ sei in Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur $T$.

   a) Bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme $Z_\mathrm{k}$ sowie die freie Energie $F$.

   **Lösung:** Die kanonische Zustandssumme ist

   $$Z_\mathrm{k} = \frac{1}{N!}\left(\frac{1}{\beta\hbar\omega}\right)^{3N}.$$

   Daraus ergibt sich die freie Energie

   $$F = -3Nk_BT \ln\left(\frac{k_BT}{\hbar\omega}\right) + k_BT\ln(N!).$$

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $w(E)$ die Energie $E$ des idealen Gases im Energieintervall $[E, E + dE]$ zu finden?

**Lösung:** Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist

$$w(E) = \frac{1}{Z_\mathrm{k}} \Omega(E) e^{-\beta E} = \beta^{3N} \frac{E^{3N-1}}{\Gamma(3N)} e^{-\beta E}$$

mit

$$\Omega(E) = \frac{1}{N!} \left( \frac{1}{\hbar\omega} \right)^{3N} \frac{E^{3N-1}}{\Gamma(3N)}.$$

c) Berechnen Sie den Erwartungswert der Energie $\langle E \rangle$ sowie die Varianz der Energie $\delta E^2 = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$. Wie verhält sich die relative Abweichung $\delta E / \langle E \rangle$ im Grenzfall großer Teilchenzahlen?

**Lösung:** Der Erwartungswert ist gegeben durch

$$\langle E \rangle = \int_0^\infty E \, w(E) \, dE = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln(Z_\mathrm{k}) = \frac{3N}{\beta}.$$

Mit

$$\langle E^2 \rangle = \int_0^\infty E^2 \, w(E) \, dE = \frac{1}{Z_\mathrm{k}} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} Z_\mathrm{k} = \frac{(3N+1)3N}{\beta^2}$$

ist die Varianz der Energie gegeben durch

$$\delta E^2 = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = \frac{3N}{\beta^2}.$$

Damit ergibt sich relative Abweichung

$$\frac{\delta E}{\langle E \rangle} = \sqrt{\frac{3N}{9N^2}} = \frac{1}{\sqrt{3N}}.$$

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Auslenkung eines zufällig herausgegriffenen Teilchens im Intervall $[r, r + dr]$ liegt?

**Lösung:** Die Wahrscheinlichkeitsverteilung berechnet sich analog zur Maxwell-Boltzmann-Verteilung

$$w(x,y,z) = \left( \frac{m\omega^2}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{-m\omega^2(x^2+y^2+z^2)}{2k_B T}} \to w(r) = 4\pi r^2 \left( \frac{m\omega^2}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{-m\omega^2 r^2}{2k_B T}}$$

3. **Zwei Teilsysteme in Kontakt mit einem Wärmebad**

Ein Behälter mit idealem Gas werde durch eine unbewegliche, wärmeleitende Trennwand in zwei Teilsysteme geteilt. Insgesamt gilt $V = V_1 + V_2$ und $N = N_1 + N_2$. Beide Teile seien in Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur $T$.

a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme des ersten und zweiten Teilsystems $Z_{\mathrm{k}}^{(1)}(T, V_1, N_1)$, $Z_{\mathrm{k}}^{(2)}(T, V_2, N_2)$ sowie des kombinierten Systems $Z_{\mathrm{k}}(T, V, N)$. Wie lautet der Zusammenhang zwischen den drei Größen?

**Lösung:** Es ergibt sich mit $\lambda = \sqrt{\frac{h^2}{2\pi m k_B T}}$:

$$Z_{\mathrm{k}}^{(1)}(T, V_1, N_1) = \frac{V_1^{N_1}}{N_1!\lambda^{3N_1}} \qquad Z_{\mathrm{k}}^{(2)}(T, V_2, N_2) = \frac{V_2^{N_2}}{N_2!\lambda^{3N_2}}.$$

Für die kanonische Zustandssumme des Systems mit Trennwand gilt

$$Z_{\mathrm{k}}(T, V, N) = \frac{V_1^{N_1} V_2^{N_2}}{N_1! N_2! \lambda^{3N}}$$

damit ergibt sich der einfache Zusammenhang

$$Z_{\mathrm{k}}(T, V, N) = Z_{\mathrm{k}}^{(1)}(T, V_1, N_1) Z_{\mathrm{k}}^{(2)}(T, V_2, N_2)$$

**Bemerkung:** Beachten Sie, dass für die kanonische Zustandssumme des Systems ohne Trennwand $Z_{\mathrm{k}}^{\text{no wall}}$ folgender Zusammenhang gilt:

$$Z_{\mathrm{k}}^{\text{no wall}}(T, V, N) = \sum_{N'=0}^{N} Z_{\mathrm{k}}^{(1)}(T, V_1, N') Z_{\mathrm{k}}^{(2)}(T, V_2, N - N')$$

b) Berechnen Sie für Helium die Entropie des kombinierten Systems für $N_1 = N_2 = 10^{23}$ und $V_1 = V_2 = 1\ \mathrm{m}^3$, wenn der Erwartungswert der Energie des kombinierten Systems $\langle E \rangle = 1000$ J beträgt. Vergleichen Sie mit dem Wert den Sie in Beispiel 2d im 4. Tutorium berechnet haben.

**Lösung:** Die mikrokanonische Entropie kann mit $\langle E \rangle = \frac{3N}{2} k_B T$ geschrieben werden als

$$\begin{aligned}
S_{\mathrm{MK}} &= k_B \ln \left( \frac{V_1^{N_1} V_2^{N_2}}{N_1! N_2!} \left( \frac{\langle E \rangle}{\lambda^2 k_B T} \right)^{\frac{3N}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{3N}{2} + 1)} \right) \\
&= k_B \ln \left( \frac{V_1^{N_1} V_2^{N_2}}{N_1! N_2! \lambda^{3N}} \frac{(3N/2)^{3N/2}}{\Gamma(\frac{3N}{2} + 1)} \right) \\
&\simeq k_B \ln \left( \frac{V_1^{N_1} V_2^{N_2}}{N_1! N_2! \lambda^{3N}} e^{3N/2} \right) \\
&= k_B \ln \left( \frac{V_1^{N_1} V_2^{N_2}}{N_1! N_2! \lambda^{3N}} \right) - \frac{3N}{2} k_B.
\end{aligned}$$

Für die kanonische Entropie erhalten wir

$$S_{\mathrm{k}} = \frac{F}{T} - \frac{\langle E \rangle}{T} = k_B \ln \left( \frac{V_1^{N_1} V_2^{N_2}}{N_1! N_2! \lambda^{3N}} \right) - \frac{3N}{2} k_B.$$

Wir müssen also keine neue Berechnung machen. Die Entropie hat den gleichen Wert wie in Beispiel 2c im 4.Tutorium $S = 56$ J/K.

c) Nun werde die Trennwand entfernt. Berechnen Sie für das neue System die Wahrscheinlichkeit $N_1'$ Teilchen im Volumen $V_1$ zu finden.

**Lösung:** Die kanonische Zustandssumme des Systems ohne Wand ist gegeben durch

$$Z_{\mathrm{k}}^{\text{no wall}} = \frac{V^N}{N!\lambda^{3N}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit $N_1'$ Teilchen im Volumen $V_1$ und $N - N_1'$ Teilchen im Volumen $V_2$ zu finden ist:

$$w(N_1') = \frac{Z_{\mathrm{k}}^{(1)}(T, V_1, N_1') Z_{\mathrm{k}}^{(2)}(T, V_2, N - N_1')}{Z_{\mathrm{k}}^{\text{no wall}}} = \frac{N!}{N_1'!N_2'!} \frac{V_1^{N_1'} V_2^{N_2'}}{V^N}.$$

Zu kreuzen (online im **TUWEL**-Kurs zur LVA): 1/2ab/2cd/3ab/3c