# 7. Tutorium VU Statistische Physik I, 15.06.2018

1. **Quantenmechanische mikrokanonische Zustandssumme**

   Betrachten Sie drei nicht wechselwirkende Teilchen in einer **eindimensionalen** harmonischen Falle. Welche Energien $\varepsilon_i$ kann ein quantenmechanisches Teilchen in der Falle annehmen? Berechnen Sie die ersten drei möglichen Werte der Gesamtenergie $E_0, E_1, E_2$, sowie die zugehörige mikrokanonische Zustandssumme für

   a) drei Bosonen mit Spin $s = 0$.

   b) drei Fermionen mit Spin $s = 1/2$.

2. **Quantenmechanische kanonische Zustandssumme**

   Zwei nicht wechselwirkende Teilchen der Masse $m$ seien gefangen in einer **eindimensionalen** harmonischen Falle und in Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur $T$. Ermitteln Sie die zugehörige innere Energie für

   a) zwei fiktive Fermionen mit Spin $s = 0$.

   b) zwei Bosonen mit Spin $s = 0$.

   **Hinweis:** Verwenden Sie

$$\sum_{0 \leq n_1 < n_2} x^{n_1+n_2} = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2-n_1=1}^{\infty} x^{2n_1} x^{n_2-n_1}$$

3. **Ideales Fermigas**

   Betrachten Sie ein Fermigas ($s = 1/2$) in einer **zweidimensionalen** harmonischen Falle mit Kreisfrequenz $\omega$. Das System befinde sich in Kontakt mit einer Umgebung der Temperatur $T$ und dem chemischen Potential $\mu$.

   a) Bestimmen Sie die möglichen Energiewerte $\varepsilon_i$ die ein quantenmechanisches Teilchen in der Falle annehmen kann. Wie groß ist die mittlere Besetzungszahl $\langle n_i \rangle$ dieser Zustände?

   b) Berechnen Sie das großkanonische Potential

$$J = -k_B T \sum_{i=0}^{\infty} \ln\left(1 + z e^{-\beta \varepsilon_i}\right)$$

   indem Sie die Summe über die Einteilchenzustände durch das Integral

$$\sum_{i=0}^{\infty} \to \int_0^{\infty} (2s+1)\Omega_1(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

   ersetzen, wobei $\Omega_1(\varepsilon)$ die klassische mikrokanonische Zustandssumme eines Teilchens ist.

c) Berechnen Sie die mittlere Energie $\langle E \rangle$ als Funktion von $\omega, z$ und $T$. Zeigen Sie, dass im Grenzfall $T \to \infty$ die klassische kalorische Zustandsgleichung $\langle E \rangle = 2\langle N \rangle k_B T$ folgt.

**Hinweis:** Verwenden Sie $(e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1)^{-1} \simeq e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}$ im Grenzfall $T \to \infty$.

4. **Ideales Bosegas**

Betrachten Sie ein ideales Bosegas ($s = 0$) der Masse $m$ in einer **zweidimensionalen** Box mit Seitenlänge $L$, welches sich in Kontakt mit einer Umgebung der Temperatur $T$ und dem chemischen Potential $\mu$ befindet.

a) Berechnen Sie das großkanonische Potential

$$J = k_B T \sum_{i=0}^{\infty} \ln\left(1 - z e^{-\beta \varepsilon_i}\right)$$

analog zu Beispiel 3b indem Sie die Summe durch das Integral ersetzen.

b) Zeigen Sie, dass die mittlere Energie gegeben ist durch $\langle E \rangle = pL^2$.

Zu kreuzen (online im **TUWEL**-Kurs zur LVA): 1/2/3ab/3c/4