Gerhard Kahl & Florian Libisch

STATISTISCHE PHYSIK 1 (VU – 136.020)

2. Tutoriumstermin (29.3.2019)

T6. Berechnen Sie die spezifischen Wärmen $c_V = C_V/N$ und $c_P = C_P/N$ eines Systems, wenn dessen Entropie pro Teilchen, $s = S/N$, durch folgende Formel gegeben ist

$$s(e, v) = ae^{1/2} + bv^{1/2};$$

dabei sind $e = E/N$ und $v = V/N$; a und b sind Konstanten.

T7. Eine diskrete Zufallsvariable ergibt mit Wahrscheinlichkeit p das Ergebnis 1 und mit Wahrscheinlichkeit $(1-p)$ das Ergebnis 0. Die Wahrscheinlichkeit bei n-maliger Wiederholung des Experiments k-mal das Ergebnis 1 zu erhalten ist durch die Binomialverteilung gegeben, also

$$p_{\mathrm{B}}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

(a) Betrachten Sie $p_{\mathrm{B}}(k)$ im Grenzwert $p \to 0$, $n \to \infty$, wobei $pn = \lambda = \mathrm{const.}$ Zeigen Sie, daß sich in diesem Grenzwert die diskrete Poisson-Verteilung

$$p_{\mathrm{P}}(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}$$

ergibt;

(b) zeigen Sie explizit, daß die diskrete Poisson-Verteilung korrekt auf 1 normiert ist;

(c) berechnen Sie das erste und zweite Moment, sowie die Varianz der diskreten Poisson-Verteilung.

T8. Mit einem statistisch ausgewogenen, sechs-seitigen Würfel wird N-mal gewürfelt.

Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung für

(a) die Summe Σ der erwürfelten Augen und

(b) das Produkt Π der erwürfelten Augen.

Wie verhält sich dabei jeweils das Verhältnis von Erwartungswert zu Standardabweichung im Grenzwert großer N?

(c) Betrachten Sie nun den Fall $N = 4$, mit einer Summe der Augenzahlen von $\Sigma_1 = 14$, bzw. $\Sigma_2 = 24$. Berechnen Sie in beiden Fällen die Anzahl möglicher Mikrozustände, die mit dem gegebenen Makrozustand kompatibel sind.

T9. Gegeben ist die Betaverteilung, $B_{\nu,\mu}(x)$, mit

$$B_{\nu,\mu}(x) = \frac{\Gamma(\mu+\nu)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)} x^{\nu-1}(1-x)^{\mu-1}.$$

Zeigen Sie, daß die Betaverteilung für große μ-Werte in eine kontinuierliche Poisson-Verteilung übergeht, also

$$B_{\nu,\mu}(x) \sim \mu P_\nu(\mu x)$$

mit

$$P_\nu(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-1} \mathrm{e}^{-t} \qquad t \geq 0.$$

Hinweis: Beachten Sie, daß

$$\lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{y}{N}\right)^N = \mathrm{e}^{-y}$$

und verwenden Sie die Stirling Formeln (sh. Formelsammlung).

Zu kreuzen: 6; 7a, 7bc; 8a, 8b, 8c; 9