Statistische Physik I (SS 2020): Tutorium 8

22. Neutronenstern

Ein Neutronenstern besteht aus einem entarteten Gas aus N Neutronen, der rein durch den Entartungsdruck gegen den gravitativen Kollaps stabilisiert wird. Unter der vereinfachten Annahme eines kugelförmigen Sterns mit Volumen $V = 4\pi R^3/3$ und einer homogenen Dichte $n = N/V$ ist die Gesamtenergie des Neutronensterns durch

$$U_{\text{ges}}(R) = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} + U_n(R) \tag{1}$$

gegeben, wobei $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$ die Gravitationskonstante und M die Masse des Neutronensterns bezeichnet. Die Neutronen können nicht-relativistisch behandelt werden und die Energie $U_n(R)$ des Neutronengases kann daher durch die Grundzustandsenergie eines idealen Fermigases mit Masse $m_n \simeq 1.67 \times 10^{-27}$ kg und Spin $S = 1/2$ approximiert werden (siehe Vorlesung).

Berechnen Sie durch Minimieren der Gesamtenergie den Radius R eines Neutronensterns mit der Masse der Sonne, $M = M_\odot \simeq 2 \times 10^{30}$ kg.

Bemerkung. Ein Stern, der im finalen Stadium seines Lebens eine Masse $M < M_C \approx 1.4\,M_\odot$ hat, wird ein *weißer Zwerg* werden (He Kerne und ein freies Elekronengas). Dieser Limes ("Chandrasekhar limit") kann durch eine vollständige relativistische Beschreibung des Elektronengas (mit $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{c^2p^2 + m_n^2c^4}$) bestimmt werden. Oberhalb dieses Limes reicht auch der Entartungsdruck der Elektronen nicht mehr aus, die Gravitationseffekte auszugleichen. In diesem Fall wird entweder einen Neutronenstern stabilisiert (für $M \simeq 1.4 \div 2.2\,M_\odot$) oder, für noch massivere Sterne, ein schwarzes Loch.

Spin des Neutrons $S = 1/2 \quad \Rightarrow \quad g_S = 2$. Die innere Energie

$$U_n = \frac{4\pi V g_S}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^{p_F} dp\, p^2\, \frac{p^2}{2m_n}.$$

Vorsicht: In manchen Fällen wurde unkorrekterweise die innere Energie U_n mit der Fermi-Energie identifiziert. Die beiden sind selbstverständlich **unterschiedliche** Größen, deren Relation für nicht-wechselwirkende Fermigase bei $T = 0$ lautet: $U = \int_0^{E_F} dE\, E\, D(E)$.

Wir wissen schon, dass das Fermi-Momentum ist

$$p_F = \hbar\left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{1/3} = \hbar\left(\frac{3\pi^2 M}{m_n V}\right)^{1/3},$$

die Zahl der Neutronen $N = M/m_n$ wird durch das Verhältnis von der Masses des Sterns zu Masse des Neutrons ausgedruckt. Das Volumen des Sternes ist $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

$$U_n(R) = \frac{3}{10}\left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3}\left(\frac{M}{m_n}\right)^{5/3}\frac{\hbar^2}{m_n R^2}.$$

Aus dem Minimieren von $U = U_g + U_n$ bekommen wir

$$R = \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{G M^{\frac{1}{3}} m_n^{\frac{8}{3}}} \simeq 1.2 \times 10^4 \text{ m} = 12 \text{ km} \quad .$$

23. Fermi-Gas in einer 2D harmonischen Falle

Ein Gas aus Fermionen mit Spin S sein in einem 2D harmonischen Fallenpotential mit Fallenfrequenz ω eingeschlossen.

(a) Berechnen Sie die Zustandsdichte $D(E)$ für dieses System.
Analog zur Vorlesung: $D(E) = g_S E/(\hbar\omega)^2$.

(b) Leiten Sie für diesen Fall einen Ausdruck für die Teilchenzahl N und für die innere Energie U her. Drücken Sie das Resultat mit Hilfe der Fermi-Integrale $f_\alpha(z)$ aus.

$$\begin{aligned} N = \int_0^\infty dE\, D(E) N_F(E) =& \frac{g_S}{(\hbar\omega)^2} \int_0^\infty dE \frac{E}{e^{\beta E}/z + 1} = g_S \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega}\right)^2 \int_0^\infty dx \frac{x}{e^x/z + 1} \\ =& g_S \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega}\right)^2 f_2(z) \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} U = \int_0^\infty dE\, D(E) E N_F(E) =& \frac{g_S}{(\hbar\omega)^2} \int_0^\infty dE \frac{E^2}{e^{\beta E}/z + 1} = k_B T g_S \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega}\right)^2 \int_0^\infty dx \frac{x^2}{e^x/z + 1} \\ =& 2 k_B T g_S \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega}\right)^2 f_3(z) \end{aligned} \tag{3}$$

(c) Berechnen Sie die Fermi-Energie E_F und $U(N, T \to 0)$.

$$N = \int_0^{E_F} dE\, D(E) = g_S \frac{E_F^2}{2(\hbar\omega)^2}, \qquad \Rightarrow \qquad E_F = \hbar\omega\sqrt{2N/g_S} \tag{4}$$

$$U = \int_0^{E_F} dE\, D(E) E = g_S \frac{E_F^3}{3(\hbar\omega)^2} = \frac{2}{3} N E_F \tag{5}$$

(d) Berechnen Sie das chemische Potential $\mu(T)$ und die innere Energie $U(T)$ mit Hilfe der Sommerfeld-Entwicklung als Funktion von E_F und bis zur Ordnung T^2.

$$N = \int_0^\infty dE\, D(E) N_F(E), \qquad G(E) = \frac{g_S}{(\hbar\omega)^2} \int_0^E dE' E' = g_S \frac{E^2}{2(\hbar\omega)^2} \tag{6}$$

$$G(E) = \frac{g_S}{2(\hbar\omega)^2}\left[\mu^2 + 2(E-\mu)\mu + (E-\mu)^2\right], \qquad \Rightarrow \qquad G_0 = g_S \frac{\mu^2}{2(\hbar\omega)^2},\; G_2 = \frac{g_S}{2(\hbar\omega)^2} \tag{7}$$

$$N \simeq G_0 + (k_B T)^2 J_2 G_2 = g_S \frac{\mu^2}{2(\hbar\omega)^2}\left[1 + \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{k_B T}{\mu}\right)^2\right] \tag{8}$$

Wir finden $\mu(N,T)$ durch iterative[1] Auflösung der Gleichung

$$\mu = E_F \left[1 + \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{k_B T}{\mu}\right)^2\right]^{-1/2} \approx E_F \left[1 - \frac{\pi^2}{6}\left(\frac{k_B T}{\mu}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad \mu \simeq \hbar\omega\sqrt{\frac{2N}{g_S}}\left[1 - \frac{\pi^2}{6}\left(\frac{k_B T}{E_F}\right)^2\right] \tag{9}$$

$$\Rightarrow \quad N = g_S \frac{E_F^2}{2(\hbar\omega)^2}.$$

Häufiger Fehler in den am 07.06 abgegebenen Lösungen: Die Entwicklung wurde manchmal nicht in dimensionslosen Größen, also in diesem Fall $\frac{k_B T}{E_F}$ oder $\frac{k_B T}{\mu}$, gemacht. Dieses dimensionslose Verhätnis spielt eine bedeutende Rolle in der Physik der Fermigase, weil oft die Energieskala E_F viel größer als $k_B T$ ist, wobei T die Raumtemperatur ist. Innere Energie:

$$U = \int_0^\infty dE\, D(E) E N_F(E), \qquad G(E) = \frac{g_S}{(\hbar\omega)^2}\int_0^E dE'(E')^2 = g_S \frac{E^3}{3(\hbar\omega)^2} \tag{10}$$

$$G(E) = \frac{g_S}{3(\hbar\omega)^2}\left[\mu^3 + 3(E-\mu)\mu^2 + 3(E-\mu)^2\mu + (E-\mu)^3\right], \qquad \Rightarrow \qquad G_0 = \frac{g_S \mu^3}{3(\hbar\omega)^2},\, G_2 = \frac{g_S \mu}{(\hbar\omega)^2} \tag{11}$$

$$U \simeq G_0 + (k_B T)^2 J_2 G_2 = g_S \frac{\mu^3}{3(\hbar\omega)^2}\left[1 + \pi^2\left(\frac{k_B T}{\mu}\right)^2\right] \tag{12}$$

Einsetzen von $\mu(N,T)$:

$$\begin{aligned} U &\simeq \frac{g_S E_F^3}{3(\hbar\omega)^3}\left[1 - \frac{\pi^2}{6}\left(\frac{k_B T}{E_F}\right)^2\right]^3 \left[1 + \pi^2\left(\frac{k_B T}{\mu}\right)^2\right] \approx \\ &\approx \frac{g_S E_F^3}{3(\hbar\omega)^3}\left[1 + \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{k_B T}{E_F}\right)^2\right] = \frac{2}{3} N E_F \left[1 + \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{k_B T}{E_F}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{13}$$

24. Kondensation im Schwerefeld

Ein Gas aus N Bosonen mit Masse m und Spin $S = 0$ sei in einem offenen Behälter mit Grundfläche $A = L \times L$ in der (x,y)-Ebene eingeschlossen. In z-Richtung wird das Gas durch eine harte Wand bei $z = 0$ und nach oben hin durch die Gravitationskraft gebunden. Die Einteilchen-Energieeigenwerte sind für dieses Problem in guter Näherung durch

$$E_{\vec{n}} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 (n_x^2 + n_y^2) + m g h_0 n_z^{\frac{2}{3}}, \qquad h_0 = \left(\frac{9\pi^2\hbar^2}{8m^2 g}\right)^{\frac{1}{3}}, \tag{14}$$

gegeben, wobei $n_{x,y} \in \mathbb{Z}$, $n_z = 1, 2, \ldots, \infty$ und $g \simeq 9.81$ m/s^2.

[1] Alternativer Lösungsweg: man kann die Gleichung für μ^2 exakt lösen und erst danach den entsprechenden Ausdruck bis zur zweiten Ordnung in $\frac{k_B T}{E_F}$ entwickeln.

(a) Vergleichen Sie die Verteilung der Energieeigenwerte $E_{\vec{n}}$ mit denen eines Teilchens in einer 3D Box und argumentieren Sie rein qualitativ, warum es auch in diesem Fall zu einer Bose-Einstein-Kondensation kommen kann.
Wegen $E \sim n^{2/3}$ sind die Energieabstände im Schwerefeld kleiner as in einem Box-Potential. D.h. die Zustandsdichte skaliert stärker mit der Energie als im 3D Fall. Daher ergibt sich ein $N \sim g_\alpha(z)$ mit $\alpha > 3/2$ und $g_\alpha(1) < \infty$.

(b) Leiten Sie aus Gleichung (14) die Zustandsdichte

$$D(E) = \frac{A}{2\pi}\frac{m}{\hbar^2}\left(\frac{E}{mgh_0}\right)^{\frac{3}{2}} = KE^{\frac{3}{2}} \tag{15}$$

für dieses System ab.
Man kann verwenden, z.B., die Darstellung $D(E) = \sum_{\vec{n}} \delta(E - E_{\vec{n}}) \approx \int_0^\infty dn_z \int_{-\infty}^\infty dn_x dn_y\, \delta(E - E_{\vec{n}})$. Mit $E_0 = mgh_0$ und $\tilde{E} = E - E_0 n_z^{2/3}$ erhalten wir

$$D(E) = \int_0^{(E/E_0)^{3/2}} dn_z \underbrace{\int dn_x \int dn_y\, \delta\left(\tilde{E} - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 (n_x^2 + n_y^2)\right)}_{=D_{2d}(\tilde{E})} \tag{16}$$

Dabei ist $D_{2d}(E) = Am/(2\pi\hbar^2)$ die Zustandsdichte eines Gases in 2D, die z.B. durch Einführen von Polarkoordinaten abgleitet werden kann. Da $D_{2d}(E)$ unabhängig von der Energie ist, folgt sofort Gleichung (2).

(c) Berechnen Sie einen Ausdruck für die Teilchenzahl N und die Kondensationstemperatur T_c für das Bose Gas im Schwerefeld. Schreiben Sie das Resultat als

$$\frac{T_c}{T_g} = \eta \times \left(\frac{h_0^2}{A}N\right)^\gamma, \tag{17}$$

wobei $T_g = (mgh_0)/k_B$, und bestimmen Sie die numerischen Koeffizienten η und γ.
Aus $D(E)$ folgt

$$N = N_0 + K(k_B T)^{5/2}\Gamma(5/2) g_{\frac{5}{2}}(z) = N_0 + \frac{3\sqrt{\pi}}{4} K (k_B T)^{5/2} g_{\frac{5}{2}}(z) \tag{18}$$

und durch einsetzen der Definition von T_g und h_0 ferhält man

$$k_B T_c = \left(\frac{4N}{3\sqrt{\pi} K g_{\frac{5}{2}}(1)}\right)^{2/5}, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{T_c}{T_g} = \underbrace{\left(\frac{64}{27\pi^{\frac{3}{2}} g_{\frac{5}{2}}(1)}\right)^{2/5}}_{\simeq 0.63} \times \left(\frac{h_0^2}{A}N\right)^{2/5}. \tag{19}$$

(d) Berechnen Sie h_0, T_g und T_c für ein Gas aus $N = 10^5$ Rubidium Atomen der Masse $m = 85$ amu und für $L = 100\,\mu$m.

$$h_0 = 825\,\text{nm}, \qquad T_g = 83\,\text{nK}, \qquad T_c = 113\,\text{nK}. \tag{20}$$

Anmerkung: Bei Rundungsfehler können leicht unterschiedliche Werte (Grösseordung 800 nm) für h_0 herauskommen.

Kreuze für: 22; 23 a)+b); 23 c); 23 d); 24 a)+b); 24 c)+d)