Statistische Physik I (SS 2020): Tutorium 9

25. Spin-1/2 Fermionen im magnetischen Feld

Betrachten Sie N nichtwechselwirkenden Fermionen mit Spin $S = 1/2$ im Volumen V. Im Gegensatz zur Vorlesung soll hier die Energieaufspaltung der Spinzustände mit $m_s = \pm 1/2$ in einem äußeren Magnetfeld B berücksichtigt werden. D.h.

$$E_{\vec{k},m_s} = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} + 2\mu_B B m_s, \tag{1}$$

wobei μ_B das Bohrsche Magenton bezeichnet[1].

Berechnen Sie für $T = 0$ und unter der Annahme $\mu_B B \ll E_F$ die Magnetisierung $M(B) = \mu_B(N_- - N_+)$, wobei N_+ und N_- die Zahl der Fermionen in den Spinzuständen $m_s = \pm 1/2$ bezeichnen. Verwenden Sie dazu, dass $|N_- - N_+| \ll N_- + N_+ = N$. Berechnen Sie auch die entsprechende magnetische Suszeptibilität: $\chi = \frac{\partial M}{\partial B}\big|_{V,N}$ bei $T = 0$.

$$\begin{aligned} N_\mp &= \lim_{T\to 0} V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\exp\left[\left(\frac{p^2}{2m} \mp \mu_B B - E_F\right)/(k_B T)\right] + 1} = \\ &= \frac{V}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^{\sqrt{2m(E_F \pm \mu_B B)}} dp\, p^2 = \frac{V}{6\pi^2\hbar^3} [2m(E_F \pm \mu_B B)]^{3/2}. \end{aligned}$$

Da das Feld $B \ll E_F/\mu_B$ schwach ist, ergibt die lineare Annäherung

$$N_\mp \approx \frac{V(2mE_F)^{3/2}}{6\pi^2\hbar^3}\left(1 \pm \frac{3\mu_B B}{2E_F}\right), \qquad N = N_- + N_+ \approx \frac{V(2mE_F)^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3},$$

und wir bekommen den bekannten, von B unabhängigen Ausdruck für die Fermi Energie

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{2/3}.$$

Die Magnetisierung ist

$$M = \mu_B(N_- - N_+) = \frac{\mu_B V}{6\pi^2\hbar^3}\left\{[2m(E_F + \mu_B B)]^{3/2} - [2m(E_F - \mu_B B)]^{3/2}\right\}. \tag{2}$$

[1] Da das magnetische Moment des Elektrons in Gegenrichtung seines Drehimpulses (hier: seines Spins $\frac{1}{2}$) orientiert ist, werden die Spins eines Elektronengas dazu tendieren, sich in Gegenrichtung zu einem externen Magnetfeld zu orientieren (d.h., $N_- > N_+$). Die Magnetisierung eines Elektronengases wird so definiert, damit sie positiv ist, wenn $N_- > N_+$ ist. Beachten Sie, dass in der ursprünlgichen Angabe für dieses Beispiel die Magnetisierung mit einem extra Minusvorzeichen definiert wurde.

In schwachem magnetischem Felde gist es $|N_- - N_+| \ll N$ und

$$M \approx \frac{\mu_B^2 BV(2mE_F)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3 E_F} = \frac{3\mu_B^2 BN}{2E_F}.$$

Die Berechnung der entsprechenden magnetische Suszeptibilität ergibt dann:

$$\chi = \left.\frac{\partial M}{\partial B}\right|_{V,N} = \frac{3\mu_B^2 N}{2E_F}.$$

26. Verdünnte Quantengase

Wir betrachten hier ideale bosonische und fermionische Quantengase im klassischen Grenzfall (hohe Temperatur T, niedrige Dichte n), deren thermische Zustandsgleichung in der VO inklusive des ersten Korrekturterms $\sim n\lambda_T^3$ für kleine z abgleitet wurde.

(a) Betrachten Sie zuerst ein einkomponentiges Bosegas mit Masse M. Berechnen Sie quantenmechanischen Korrekturen zur thermischen Zustandsgleichung bis zur Ordnung $(n\lambda_T^3)^2$.
Aus $n\lambda_T^3 = x = z + \frac{z^2}{2^{\frac{3}{2}}} + \frac{z^3}{3^{\frac{3}{2}}} + \cdots$ erhält man $z(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$, wobei $x = n\lambda_T^3$ und $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -2^{-\frac{3}{2}}$, $\alpha_3 = 2(2^{-\frac{3}{2}})^2 - 3^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}\right)$ (siehe die entsprechenden VO-Ergänzungsfolien in TISS).
Wir können nun diesen expliziten Ausdruck von $z(x)$ in die thermische Zustandsgleichung des Bosonengases $\frac{P}{k_BT} = \lambda_T^{-3}\left(z + \frac{z^2}{2^{\frac{5}{2}}} + \frac{z^3}{3^{\frac{5}{2}}} + \cdots\right)$ einsetzen. Man findet:

$$\begin{aligned}\frac{P}{k_BT} &= \lambda_T^{-3}\left[\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \frac{(\alpha_1 x + \alpha_2 x^2)^2}{2^{\frac{5}{2}}} + \frac{(\alpha_1 x)^3}{3^{\frac{5}{2}}} + \cdots\right] &(3)\\ &= \lambda_T^{-3}\left[\alpha_1 x + \left(\alpha_2 + \frac{\alpha_1^2}{2^{\frac{5}{2}}}\right)x^2 + \left(\alpha_3 + 2\frac{\alpha_1\alpha_2}{2^{\frac{5}{2}}} + \frac{\alpha_1^3}{3^{\frac{5}{2}}}\right)x^3 + \cdots\right]. &(4)\end{aligned}$$

Der endgültige Ausdruck lautet:

$$\frac{P}{k_BT} = n\left[1 - \frac{1}{2^{\frac{5}{2}}}\,n\lambda_T^3 + \left(\frac{1}{8} - \frac{2}{3^{\frac{5}{2}}}\right)(n\lambda_T^3)^2 + O\left((n\lambda_T^3)^3\right)\right].$$

(b) Betrachten Sie nun ein Gemisch aus zwei idealen Bosongasen mit Spin $S = 0$ und Massen M_{I} und $M_{\mathrm{II}} \neq M_{\mathrm{I}}$ sowie Teichenzahlen N_{I} und N_{II}. Das Gemisch befindet sich in einem Gefäß mit Volumen V und konstanter Temperatur T. Berechnen Sie den Druck dieser Gasmischung $P_{\mathrm{I+II}}$ aus der entsprechenden thermischen Zustandsgleichung im klassischen Grenzfall unter Berücksichtigung des *ersten* Korrekturterms.
Aus der VO kennen wir die Zustandsgleichung eines vedünnten Bosegases, dessen Druck lautet $P = nk_BT\left(1 - \frac{n\lambda_T^3}{2^{\frac{5}{2}}} + \cdots\right) = k_BT\left(n - \frac{n^2\lambda_T^3}{2^{\frac{5}{2}}} + \cdots\right)$. Da die Teilchen der zwei (*unterscheidbaren*) Gase *nicht* wechselwirkend sind, wird der Druck der Mischung einfach aus die Summe der Drücke der zwei Gasen berechnet:

$$P_{\mathrm{I+II}} = P_{\mathrm{I}} + P_{\mathrm{II}} = k_BT\left(n_{\mathrm{I}} + n_{\mathrm{II}} - \frac{\left(n_{\mathrm{I}}^2\,[\lambda_T^{(\mathrm{I})}]^3 + n_{\mathrm{II}}^2\,[\lambda_T^{(\mathrm{II})}]^3\right)}{2^{\frac{5}{2}}} + \cdots\right),$$

wobei $n_{\mathrm{I}} = \frac{N_{\mathrm{I}}}{V}$, $n_{II} = \frac{N_{\mathrm{II}}}{V}$.

(c) Betrachten Sie nun den Fall $N_\mathrm{I} = N_\mathrm{II} = N/2$ und den Limes $M_\mathrm{II} \to M_\mathrm{I}$. Vergleichen Sie den resultierenden Druck in dieser Situation mit dem Druck eines einkomponentigen Bosegases mit Masse M_I und Teilchenzahl $N_\mathrm{I} = N$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

In diesem Limes findet man

$$\lim_{M_{II} \to M_\mathrm{I}} P_{\mathrm{I+II}} = k_B T \left(n - \frac{\frac{n^2}{2}\,[\lambda_T^{(\mathrm{I})}]^3}{2^{\frac{5}{2}}} + \cdots \right).$$

Im Fall des einkomponentigen Bosegases (das man als Mischung der doppelten Menge von demselben Gas I interpretieren kann : “$I + I$”) lautet die direkte Rechnung:

$$P_{\mathrm{I+I}} = k_B T \left(n - \frac{n^2 [\lambda_T^{(1)}]^3}{2^{\frac{5}{2}}} + \cdots \right),$$

mit $n = \frac{N}{V}$.

Der gefragte Vergleich ergibt dann:

$$P_{\mathrm{I+I}} - \lim_{M_\mathrm{II} \to M_\mathrm{I}} P_{\mathrm{I+II}} = -\frac{n^2 [\lambda_T^{(\mathrm{I})}]^3}{2^{\frac{7}{2}}} < 0.$$

Dieser Unterschied, der hier in den Quantenkorrekturen zum klassischen Grenzfall auftaucht, ist eine Folge der Vielteilchenquantenmechanik, in deren Beschreibung das Verhalten von Teilchen die identisch (I+I) bzw. unterscheidbar (I+II) sind, komplett anders ist. In der Tat wird der Druck einer Mischung identischer Bose-Einstein Gase *niedriger* als jener der entsprechenden Mischung zweier unterscheidbaren Gase mit sehr ähnlichen Eigenschaften.

(d) Wiederholen Sie die Aufgaben **(b)** und **(c)** für ein Gemisch aus zwei fermionischen Gasen mit Spin $\frac{1}{2}$ und Massen m_1 und m_2.
Aus der VO kennen wir die Zustandsgleichung eines vedünnten Fermigases, dessen Druck ist $P = n k_B T \left(1 + \frac{n \lambda_T^3}{2^{\frac{5}{2}}} \cdots \right) = k_B T \left(n + \frac{n^2 \lambda_T}{2^{\frac{5}{2}}} + \cdots \right)$. Da die Teilchen dieser zwei (*unterscheidbaren*) Fermi Gase *nicht* wechselwirkend sind, lautet der Druck der Mischung :

$$P_{\mathrm{I+II}} = P_\mathrm{I} + P_\mathrm{II} = k_B T \left(n_\mathrm{I} + n_\mathrm{II} + \frac{\left(n_\mathrm{I}^2\,[\lambda_T^{(\mathrm{I})}]^3 + n_\mathrm{II}^2\,[\lambda_T^{(\mathrm{II})}]^3 \right)}{2^{\frac{5}{2}}} + \cdots \right).$$

Analog zu vorher, findet man

$$P_{\mathrm{I+I}} = k_B T \left(n + \frac{n^2 [\lambda_T^{(1)}]^3}{2^{\frac{5}{2}}} + \cdots \right),$$

für den Fall des einkomponentigen Fermigasgemisches. Daher:

$$P_{\mathrm{I+I}} - \lim_{m_\mathrm{II} \to m_\mathrm{I}} P_{\mathrm{I+II}} = \frac{n^2 [\lambda_T^{(\mathrm{I})}]^3}{2^{\frac{7}{2}}} > 0.$$

Erwartungsgemäß ist der Trend für Fermionen umgekehrt: Aus vielteilchenquantenmechanischem Grunde, wird der Druck einer Mischung identischer Fermi-Diracgase *höher* als jener der entsprechenden Mischung zweier unterscheidbaren Gase mit sehr ähnlichen Eigenschaften sein.

27. Photonengas

Das Strahlungsfeld in einem Hohlraum mit Volumen $V = L^3$ wird durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H}_{\mathrm{EM}} = \sum_k \hbar\omega_k \, \hat{a}_k^\dagger a_k, \qquad k \equiv (\lambda, \vec{k}), \tag{5}$$

beschrieben, woraus sich die freie Energie

$$F(T,V) = -\frac{4\sigma}{3c} V T^4, \qquad \sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^2}, \tag{6}$$

(σ ist die Stefan-Boltzmann-Konstante) ableiten lässt (siehe Vorlesung).

(a) Berechnen Sie, ausgehend von $F(T,V)$, den Druck, die Entropie und die innere Energie des Photonengases und zeigen Sie dann mit Hilfe der Gibbs-Duhem Relation, dass $\mu = 0$.

$$p = -\left.\frac{\partial F}{\partial V}\right|_T = \frac{4\sigma}{3c} T^4, \qquad S = -\left.\frac{\partial F}{\partial T}\right|_V = \frac{16\sigma}{3c} V T^3, \qquad E = F + TS = \frac{4\sigma}{c} V T^4 \tag{7}$$

Gibbs-Duhem

$$E - TS + pV - \mu N = 0, \qquad \mu N = 0. \tag{8}$$

(b) Berechnen Sie die mittlere Photonenzahl $N = \sum_k \langle \hat{n}_k \rangle$ und zeigen Sie die folgende Relation

$$pV \approx 0.90 \times N k_B T. \tag{9}$$

D.h., Photonen erzeugen einen ähnlich großen Druck wie massive Teilchen, allerdings ist die Teilchendichte eines Photongases unter gewöhnlichen Bedingungen sehr gering. Berechnen Sie N/V und p für eine Photonengas bei Raumtemperatur und für $T = 10^7$ K (entspricht in etwa der Temperatur im Inneren der Sonne oder der Temperatur während einer Atombombenexplosion).

$$N = 2\sum_{\vec{k}} \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_k} - 1} = \frac{V}{\pi^2} \int_0^\infty dk \, \frac{k^2}{e^{\beta\hbar\omega_k} - 1} = \frac{V}{\pi^2} \frac{1}{(\beta\hbar c)^3} \underbrace{\int_0^\infty dx \, \frac{x^2}{e^x - 1}}_{\Gamma(3)\zeta(3)} = \frac{V}{\pi^2} \frac{2\zeta(3)}{(\beta\hbar c)^3} \tag{10}$$

$$pV \approx \left(\frac{4\sigma\pi^2(\hbar c)^3}{6c\zeta(3) k_B^4} \right) \times N k_B T = \left(\frac{\pi^4}{90\,\zeta(3)} \right) \times N k_B T \tag{11}$$

Zahlenwerte:

$$\text{(i)} \quad \frac{N}{V}(300\mathrm{K}) \approx 5.5 \times 10^{14}\, m^{-3}, \;\; p(300\,\mathrm{K}) \approx 2 \times 10^{-6}\,\mathrm{Pa}, \tag{12}$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{N}{V}(10^7\,\mathrm{K}) \approx 2 \times 10^{28}\, m^{-3}, \;\; p(10^7\,\mathrm{K}) \approx 2.5 \times 10^{12}\,\mathrm{Pa} \approx 2.5 \times 10^7\,\mathrm{bar} \tag{13}$$

(c) Nehmen Sie nun an, das quantisierte elektromagnetische Feld sei durch perfekte metallische Spiegel auf eine (1D) bzw. zwei (2D) Ausbreitungsrichungen beschränkt. In diesem Fall kann der Summationsindex in $\hat{H}_{\mathrm{EM}}$ auf $k = k_x$ bzw. $k = (k_x, k_y)$ eingeschränkt werden (der Polarisationsfreiheitsgrad entfällt). Berechnen Sie mit diesen Annahmen die freien Energien $F_{1\mathrm{D}}(L,T)$ und

$F_{\rm 2D}(A=L^2,T)$ für niedrigdimensionale Photonengase.
Eine direkte Rechnung ergibt in 1D:

$$F_{\rm 1D}(L,T)=(k_BT)\,\frac{L}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk_x\,\ln\big(1-\mathrm{e}^{-\frac{c\hbar|k_x|}{k_BT}}\big)=\frac{k_BT\,L}{2\pi}\,\frac{2k_BT}{\hbar c}\int_0^{\infty}dx\,\ln\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)=-\frac{\pi}{6}\,\frac{(k_BT)^2\,L}{\hbar c},$$

und, in 2D:

$$\begin{aligned}F_{\rm 2D}(A,T)&=(k_BT)\,\frac{A\,2\pi}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty}dk\,k\,\ln\big(1-\mathrm{e}^{-\frac{c\hbar k}{k_BT}}\big)\\&=\frac{k_BT\,A}{2\pi}\,\frac{(k_BT)^2}{\hbar^2c^2}\int_0^{\infty}dx\,x\,\ln\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)=-\frac{\zeta(3)}{2\pi}\,\frac{(k_BT)^3\,A}{\hbar^2c^2},\end{aligned}\qquad(14)$$

wobei $\zeta(3)\simeq 1.20206$.

Häufiger Fehler in den am 07.06 abgegebenen Lösungen: Im 1D Fall wurde das Momentum-Integral oft **nur** über die *positiven* Werte von k_x gemacht (damit bekommt man aber nur *die Hälfte* des ganzen k-Integrals in 1D!). Bitte beachten Sie, dass die oft verwendeten Ausdrücke des k-Integrals für $D\geq 2$ in *Polarkoordinaten* gegeben sind, damit wird das entsprechende k-Integral über die positive Werte von $k=|\vec{k}|\geq 0$ durchgeführt.

Kreuze für: 25; 26 a) 26 b)+c)+d); 27 a); 27 b); 27 c)