Statistische Physik I, SS 2020: Schriftlicher Test (25.06.2020)

Name: **HS:**

Matrikelnummer: **Sitzplatz:**

---

1. Kreisprozess (16P)

Betrachten Sie einen Kreisprozess, bei dem ein ideales Gas ausgehend von einem Gleichgewichtszustand mit Druck p_1 und Volumen V_1 folgende Schritte durchläuft:

I) adiabatische Kompression

II) isobare Expansion

III) adiabatische Expansion

IV) isochore Dekompression (=Druckverminderung)

Alle Prozesse werden als quasi-statisch angenommen. Die Teilchenzahl sei konstant.

(a) Skizzieren Sie den Kreisprozess im p-V und T-S Diagramm. (6P)

(b) Berechnen Sie für jeden Schritt $i = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}$ die *vom* System geleistete Arbeit ΔW_i und die *vom* System aufgenommene Wärme ΔQ_i (als Funktion der jeweiligen Drücke und Volumina). Geben Sie jeweils explizit das Vorzeichen von ΔW_i und ΔQ_i an. (8P)

(c) Geben Sie den Wirkungsgrad η dieser Arbeitsmaschine als Funktion der ΔW_i und ΔQ_i an. Der Wirkungsgrad muss nicht explizit berechnet werden. (2P)

2. Klassisches Gas im Gravitationsfeld (13P)

Betrachten Sie ein klassisches Gas von N nicht-wechselwirkenden Teilchen der Masse m im Schwerefeld. Das Gas befindet sich in einem nach oben hin unbegrenzten Behälter mit Querschnittsflche A und die Hamiltonfunktion für dieses System lautet

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} + mgz_i \right). \tag{1}$$

(a) Wie lautet der allgemeine Ausdruck für die kanonische Phasenraumdichte ρ_{K} und die kanonische Zustandssumme $Z_K(T, N)$? (3P)

(b) Berechnen Sie $Z_{\mathrm{K}}(T, N)$ und die freie Energie $F(T, N)$ für dieses System. (5P)

(c) Berechnen Sie die Wärmekapazität C_V für das Gas im Schwerefeld. (5P)

3. Dichteoperatoren (7P)

Geben sei ein 2-Niveau System mit Basiszuständen $|1\rangle$, $|2\rangle$ und 5 Operatoren mit Matrixdarstellung

$$\hat{\rho}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; \hat{\rho}_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \; \hat{\rho}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \; \hat{\rho}_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \; \hat{\rho}_5 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{i}{4} \\ \frac{i}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

wobei $(\hat{\rho})_{ij} = \langle i|\hat{\rho}|j\rangle$. Welche dieser Operatoren stellen einen gültigen Dichteoperator dar? Welche davon wiederum sind reine Zustände? Begründen Sie Ihre Antworten.

4. Fermigas (16P)

Betrachten Sie ein 1-dimensionales Fermigas mit Spin $S = \frac{1}{2}$ und Einteilchenhamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \Lambda \hat{x}^4. \tag{2}$$

Für dieses quartische Potential können die Einteilchenenergien durch

$$E_n \simeq E_0 n^{4/3}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{3}$$

genähert werden, wobei $E_0 \to 0$ im thermodynamischen Grenzfall.

(a) Schreiben Sie die Zustandsdichte für dieses System als $D(E) = KE^{\gamma-1}$ und bestimmen Sie die Parameter K und γ. (3P)

(b) Bestimmen Sie die Fermienergie E_F für eine gegebene Teilchenzahl N. (3P)

(c) Bestimmen Sie die innere Energie U dieses Fermigases und drücken Sie das Resultat mit Hilfe der Fermifunktionen $f_\alpha(z)$ aus. (4P)

(d) Berechnen Sie $U(T)$ bis zur Ordnung T^2 mit Hilfe der Sommerfeldentwicklung. Setzen Sie dazu

$$\mu(T) \simeq E_F \left[1 - \frac{\pi^2}{6}(\gamma - 1)\left(\frac{k_B T}{E_F}\right)^2 + \mathcal{O}(T^4)\right] \tag{4}$$

als bekannt voraus. (6P)

Achtung: Falls 3(a) nicht gelöst wird, können die Aufgaben 3(b)–3(d) mit Hilfe der allgemeinen Zustandsdichte $D(E) = KE^{\gamma-1}$ gerechnet werden.

5. Bose-Einstein Kondensation (8P)

Für ein Bose-Gas sei die Skalierung der Kondensationstemperatur mit der Teilchenzahl, $T_c \sim N^\kappa$, bekannt. Wie skaliert die Zustandsdichte $D(E) \sim E^\sigma$ als Funktion der Energie E? Welche Werte für den Exponenten κ sind möglich?

Formelsammlung:

- **Gamma Funktion:**

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty dy\, y^{n-1} e^{-y}, \qquad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n), \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{5}$$

- **Stirling Formel:**

$$N! \approx \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N, \qquad \ln N! \approx N \ln N - N \tag{6}$$

- **Volumen einer d-dimensionalen Kugel:**

$$V_d(R) = \int_{\sum x_i^2 < R^2} d^d x = \frac{\pi^{\frac{d}{2}} R^d}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)} \tag{7}$$

- **Gauss-Integral:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \sqrt{2\pi\sigma^2} \tag{8}$$

- **Fermi-Integral:**

$$f_\alpha(z) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{y^{\alpha-1}}{(e^y/z)+1} dy = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n^\alpha} \tag{9}$$

- **Bose-Integral:**

$$g_\alpha(z) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{y^{\alpha-1}}{(e^y/z)-1} dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha}, \qquad g_\alpha(1) = \zeta(\alpha) \tag{10}$$

Spezielle Werte:

$g_0(1) = \infty$	$g_{1/2}(1) = \infty$	$g_1(1) = \infty$	$g_{3/2}(1) = 2.612$	$g_2(1) = 1.645$	$g_3(1) = 1.202$

- **Werte der Zeta-Funktion $\zeta(\alpha)$:**

$\zeta(2) = \pi^2/6$	$\zeta(4) = \pi^4/90$	$\zeta(6) = \pi^6/945$

- **Werte der Koeffizienten J_n in der Sommerfeld Entwicklung:**

$J_0 = 1$	$J_2 = \pi^2/3$	$J_4 = 7\pi^4/15$	$J_n = 0$ für n ungerade