Statistische Physik I (SS 2020): Tutorium 1

1. Stirling Formel

Betrachten Sie die Darstellung der Fakultät $n!$ als Spezialfall der Gamma-Funktion

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx. \tag{1}$$

(a) Skizzieren Sie den Verlauf des Integranden $f(x) = x^n e^{-x}$ für große n.

(b) Schreiben Sie $f(x) = e^{g(x)}$ und entwickeln Sie den Exponenten $g(x)$ um sein Maximum.

(c) Leiten Sie daraus die Stirling Formel

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{2}$$

für große n her.

(d) Begründen Sie die weitere Näherung

$$\log(n!) \approx n\log(n) - n \tag{3}$$

anhand eines konkreten Zahlenbeispiels.

2. Vollständige Differentiale und integrierender Faktor

(a) Welcher der folgenden Ausdrücke ist tatsächlich ein vollständiges Differential (Begründung)?

$$\begin{aligned}
dF_1 &= (T + \frac{1}{2}V^2)dT + (V + \frac{1}{2}T^2)dV, \\
dF_2 &= \frac{3}{4}T^{\frac{1}{4}}V^{-\frac{1}{4}}dV + \frac{1}{4}T^{-\frac{3}{4}}V^{\frac{3}{4}}dT, \\
dF_3 &= T^{\frac{4}{3}}V^{\frac{1}{4}}(dV + dT).
\end{aligned}$$

(b) Ist $df(x, y) = xdx + (x^2/y)dy$ ein vollständiges Differential? Falls nicht, bestimmen Sie den "integrierende Faktor", d.h. eine Funktion $\gamma(x, y)$, so dass $dg = \gamma(x, y)df$ ein vollständiges Differential ergibt. *Hinweis:* $\gamma(x, y)$ ist nicht eindeutig.

(c) Zeigen Sie anhand des 1. Hauptsatzes für Gase, $dE(T, V) = \delta Q - pdV$ (=vollständiges Differential), dass $\delta Q(T, V)$ im Allgemeinen kein vollständiges Differential ist.

(d) Zeigen Sie, ausgehend von (c), dass $dY = T^{-1}\delta Q$ ein vollständiges Differential für *ideale Gase* ist. Benützen Sie für diese Aufgabe explizit die thermische und kalorische Zustandsgleichung für ideale Gase. Welcher physikalischen Größe entspricht Y?

3. Polarisierung von Kernspins

In einem NMR Experiment befinden sich in einer Probe $N = 10^{15}$ Wasserstoffkerne mit Kernspin $I = 1/2$ in einem äußeren Magnetfeld B. Jeder Spin kann entweder den Zustand $|\uparrow\rangle$ oder $|\downarrow\rangle$ annehmen. Die Energienniveaus der beiden Zustände im Magnetfeld sind gegeben durch

$$E_\uparrow = -\frac{\gamma\hbar}{2}B, \qquad E_\downarrow = \frac{\gamma\hbar}{2}B, \tag{4}$$

wobei $\gamma = 267.5 \times 10^6\ \mathrm{s}^{-1}\mathrm{T}^{-1}$ und $\hbar = 1.05 \times 10^{-34}\ \mathrm{J\ s}^{-1}$. Die Kernspins sind unabhängig von einander und $p_\downarrow$ und $p_\uparrow = 1 - p_\downarrow$ bezeichnen die Wahrscheinlichkeiten, dass sich ein einzelner Spin im Zustand $|\downarrow\rangle$ bzw. $|\uparrow\rangle$ befindet.

(a) Wie lautet die Wahrscheinlichkeit $w_N(N_\downarrow)$, dass sich genau $N_\downarrow$ Spins im Zustand $|\downarrow\rangle$ befinden? Nähern Sie diese Verteilung durch eine Gaussverteilung an und bestimmen Sie den wahrscheinlichsten Wert $\widehat{N}_\downarrow$ und die Fluktuationen $\Delta N_\downarrow$. Reproduzieren Sie dazu die Schritte aus der Vorlesung und zeigen Sie insbesondere, dass

$$\log\left[w_N(\widehat{N}_\downarrow + x)\right] \simeq \log\left[w_N(\widehat{N}_\downarrow)\right] - \frac{x^2}{2Np_\downarrow(1-p_\downarrow)}. \tag{5}$$

(b) Betrachten Sie nun eine thermische Verteilung mit

$$p_\downarrow = \frac{e^{-\frac{(E_\downarrow - E_\uparrow)}{k_B T}}}{1 + e^{-\frac{(E_\downarrow - E_\uparrow)}{k_B T}}}, \tag{6}$$

wobei $k_B = 1.38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J\ K}^{-1}$. Wie groß ist die Magnetisierung $M = \langle N_\uparrow\rangle - \langle N_\downarrow\rangle$ und die Standardabweichung $\Delta N_\downarrow$ bei $T = 300$ K und einem Magnetfeld von $B = 0.5$T? Ist die Magnetisierung statistisch von 0 unterscheidbar? Ist das bei einer Probe von $N = 10^9$ Spins immer noch der Fall?

Kreuze für: 1(a)-(d), 2(a), 2(b), 2(c)-(d), 3(a), 3(b)