Statistische Physik I (SS 2020): Tutorium 2

4. Prozesse im idealen Gas

Mittels der Zustandsgleichungen eines idealen Gases,

$$pV = Nk_BT \quad \text{und} \quad E = \frac{3}{2}Nk_BT, \tag{1}$$

sollen Prozesse beschrieben werden, für die gilt: $pV^\gamma = const.$

(a) Die Teilchenzahl sei konstant. Welche Prozesse werden mit $\gamma = 0$, $\gamma = 1$ und $\gamma = 5/3$ beschrieben?

(b) Das System werde nun von einem Zustand (p_1, V_1) in einen Zustand (p_2, V_2) mit $V_2 < V_1$ gebracht. Berechnen Sie für $\gamma = 0$, $\gamma = 1$ und $\gamma = 5/3$ die Arbeit ΔW (Vorzeichen?), welche für diese Volumensänderung am System geleistet werden muss.

(c) Berechnen Sie die Änderung der inneren Energie ΔE für diese 3 Prozesse.

5. Stirling-Wärmepumpe

Betrachten Sie einen Kreisprozess (Stirling-Zyklus), bei dem ein ideales Gas ausgehend von einem Gleichgewichtszustand mit Temperatur T_1 und Volumen V_1 folgende Schritte durchläuft:

I) isotherme Kompression (gekoppelt an Wärmebad mit Temperatur T_1)

II) isochore Abkühlung (bei Volumen V_2) durch Kopplung an Wärmebad mit Temperatur $T_2 < T_1$

III) isotherme Expansion (gekoppelt an Wärmebad mit Temperatur T_2)

IV) isochore Erwärmung durch Kopplung an Wärmebad mit Temperatur T_1

Die Zahl der Atome N im Gas bleibt konstant.

(a) Skizzieren Sie den Prozess im pV- und im TS-Diagramm und geben Sie (ohne Rechnung) das Vorzeichen der in jedem Schritt am System geleisteten Arbeit ΔW_i, (i =I,II,III,IV) und der in jedem Schritt vom System aufgenommenen Wärmemenge ΔQ_i an.

(b) Berechnen Sie explizit ΔW_i und ΔQ_i für jeden Prozessschritt als Funktionen von Temperatur und Volumen der jeweiligen Anfangs- und Endzustände. Benutzen Sie dazu die thermische und kalorische Zustandsgleichung.

(c) Leiten Sie einen Ausdruck für die insgesamt am System geleistete Arbeit W und für die *Heizeffektivität*

$$\eta^H = \frac{-Q_1}{W}, \tag{2}$$

her, wobei Q_1 die vom warmen Reservoir (T_1) ans System übertragene Wärme bezeichnet. Interpretieren Sie η^H. Vergleichen Sie η^H einer Stirling Wärmepumpe, die mit $V_1/V_2 = 10$ zwischen zwei Temperaturen $T_1 = 300$ K and $T_2 = 270$ K arbeitet, mit der direkten Umwandlung von mechanischer oder elektrischer Arbeit in Wärme, $\eta^H = 1$.

6. Thermodynamische Potentiale: ideales Gas

Die Entropie eines idealen Gases ist durch

$$S \equiv S(E, V, N) = k_B N \left[\frac{5}{2} + \log\left(\frac{V}{N} \left(\frac{4\pi m E}{3Nh^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right) \right], \tag{3}$$

gegeben (wird später in der Vorlesung hergeleitet).

(a) Leiten Sie aus der Entropie den Ausdruck für die Energie $E = E(S, V, N)$ eines idealen Gases her. Zeigen Sie: $E(S, V, N)$ ist extensiv.

(b) Leiten Sie entweder aus der Entropie oder der Energie einen Ausdruck für die Temperatur T ab und bestimmen Sie daraus die kalorische Zustandsgleichung $E(T, N)$.

(c) Leiten Sie einen (kompakten) Ausdruck für die Gibbs-Energie $G = G(T, p, N)$ eines idealen Gases durch Legendre Transformationen aus der Energie her. Welche Information geht bei der kalorischen Zustandsgleichung $E(T, N)$ im Vergleich zur Legendre transformierten Gibbs-Energie verloren? *Hinweis:* Benutzen Sie die thermische Wellenlänge $\lambda_T = \sqrt{h^2/(2\pi m k_B T)}$ zur Vereinfachung der Ausdrücke.

(d) Benützen Sie die Resultate aus (a)-(c) und zeigen Sie explizit, dass die Euler-Relation

$$E = TS - pV + \mu N$$

für ein ideales Gas erfüllt ist.

(e) Quasistatische adiabatische Prozesse in einem idealen Gas mit konstanter Teilchenzahl werden durch $pV^{\kappa_1} = const.$ im pV-Diagramm und durch $pT^{\kappa_2} = const.$ im pT-Diagramm beschrieben. Leiten Sie die Werte der Isentropenexponenten κ_1 und κ_2 direkt aus Gleichung (3) ab.

Kreuze für: 4(a)-(c), 5(a), 5(b)-(c), 6(a)-(b), 6(c)-(d), 6(e)