Statistische Physik I (SS 2020): Tutorium 3

7. Thermodynamische Potentiale: dielektrisches System

Die Anwendung eines elektrischen Feldes ($\mathcal{E}$) auf ein *dielektrisches* (d.h., nicht leitendes) Material hat den folgenden Effekt: das Feld polarisiert das System durch die Bildung lokaler elektrischer Dipole (p_i) entlang der Feldrichtung. Durch diesen Mechanismus wird die Intensität des elektrischen Feldes im System entsprechend reduziert. Bei einem reversiblen Prozess ändert sich die innere Energie E des dielektrischen Systems gemäß

$$dE(S, P, N) = TdS + \mathcal{E}dP + \mu dN, \tag{1}$$

wobei P die totale elektrische Polarisierung (extensiv) der Probe ($P = \sum_i \langle \mathrm{p}_i \rangle$) und μ das chemische Potential bezeichnet.

(a) Bestimmen Sie daraus analog zur Vorlesung für dieses System die thermodynamischen Potentiale $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}(S, \mathcal{E}, N)$, $F \equiv F(T, P, N)$ und $G \equiv G(T, \mathcal{E}, N)$ und ihre Differentiale.

(b) Für ein dielektrisches System, bei denen die Dipole nur zwei Werte einnehmen können, $\mathrm{p}_i = \pm \bar{p}$ erhalten wir

$$G(T, \mathcal{E}, N) = -k_B T N \ln \left[2 \cosh \left(\frac{\bar{p}\,\mathcal{E}}{k_B T} \right) \right]. \tag{2}$$

Leiten Sie daraus durch differenzieren einen Ausdruck für die Polarisierung P ab.

(c) Berechnen Sie die Wärmekapazität eines dielektrischen Systems in einem konstanten elektrischen Feld,

$$C_{\mathcal{E}} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{\mathcal{E}, N},$$

sowie die elektrische Suszeptibilität bei konstanter Temperatur,

$$\chi_T = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{\partial P}{\partial \mathcal{E}} \right)_{T, N}.$$

(d) Argumentieren Sie zuerst ohne Rechnung ob $C_P > C_{\mathcal{E}}$ oder $C_P < C_{\mathcal{E}}$, wobei C_P die Wärmekapazität des Dielektrikums bei konstanter Polarisierung bezeichnet. Leiten Sie dann einen expliziten Ausdruck für C_P ab.

Zusatzfrage (ohne Bewertung): Erklären Sie das Ergebnis für C_P.

Hinweis. Für (c) und (d) ist es wichtig, dass die geeigneten thermodynamischen Potentiale und die richtigen unabhängigen Variablen gewählt werden.

8. Chemische Antwortfunktion

Gegeben sei die freie Energie eines idealen Gases

$$F(T,V,N) = -Nk_BT\ln\left(\frac{eV}{N\lambda_T^3}\right), \qquad \lambda_T = \sqrt{\frac{h^2}{2\pi mk_BT}}. \tag{3}$$

Diese kann ähnlich wie in Aufgabe 6. aus der Entropie abgeleitet werden. Berechnen Sie ausgehend von $F(T,V,N)$ die chemische Antwortfunktion

$$\zeta_T = \left.\frac{\partial N}{\partial \mu}\right|_{T,V}. \tag{4}$$

9. Maxwell- und Kreisrelationen

Für drei beliebige Größen a, b und c gilt im Allgemeinen die Eulersche Kreisrelation

$$\left(\frac{\partial a}{\partial b}\right)_c\left(\frac{\partial b}{\partial c}\right)_a\left(\frac{\partial c}{\partial a}\right)_b = -1. \tag{5}$$

(a) Leiten Sie die Eulersche Kreisrelation aus den Eigenschaften der Jacobi-Determinante her.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Maxwellrelationen und der Kreisrelation für S, T und p, dass für einen reversiblen, isentropen Prozess in einem idealen Gas

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \frac{V}{C_p} \tag{6}$$

gilt.

(c) Berechnen Sie die Ableitung $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ für ein van der Waals Gas mit Zustandsgleichung

$$p = \frac{k_BT}{v-b} - \frac{a}{v^2}, \quad \text{mit} \quad v = \frac{V}{N}. \tag{7}$$

Wieso ist hier die Kreisrelation besonders nützlich?

Kreuze für: 7(a)+(b), 7(c), 7(d), 8, 9(a), 9(b)+(c)