Statistische Physik I (SS 2020): Tutorium 4

10. Phasenraum

Betrachten Sie die eindimensonale Bewegung eines Teilchens im Schwerefeld, welches für $z > 0$ durch die Hamiltonfunktion

$$H(z,p) = \frac{p^2}{2m} + mgz \tag{1}$$

beschrieben wird und bei $z = 0$ durch den Boden elastisch reflektiert wird. Die Bewegung in der x, y Ebene braucht nicht berücksichtigt werden.

(a) Lösen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen und skizzieren Sie die Bewegung des Teilchens im Phasenraum für die Anfangsbedingungen $z_0 > 0$ und $p_0 > 0$. Skizzieren Sie die mikrokanonische Phasenraumdichte $\rho_{\text{MK}}(z,p)$ für ein Teilchen mit einer Energie im Intervall $[E - \Delta, E]$, wobei $\Delta \ll E$.

(b) Berechnen Sie für dieses System die Zustandssumme $\Omega(E, \Delta)$ und die mikrokanonische Entropie $S(E, \Delta)$.

11. Einstein-Modell für Phononen: mikrokanonisches Ensemble

Phononen im Festkörper werden im Einstein-Modell durch $3N$ unabhängige harmonische Oszillatoren mit Masse m und gleicher Frequenz ω approximiert. Die klassische Hamiltonfunktion lautet in diesem Fall

$$H(\underline{q}, \underline{p}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \vec{q}_i^{\,2}, \tag{2}$$

wobei $\vec{p}_i = (p_{i,x}, p_{i,y}, p_{i,z})$ den Impuls des i-ten Gitteratoms und $\vec{q}_i = (q_{i,x}, q_{i,y}, q_{i,z})$ seine Auslenkung um die Gleichgewichtsposition beschreibt. Im Folgenden sei die Gesamtenergie des Systems im Intervall $[E - \Delta, E]$ vorgegeben.

(a) Wie lautet die mikrokanonische Phasenraumdichte $\rho_{\text{MK}}(\underline{q}, \underline{p})$ and der allgemeine Ausdruck für die Zustandssumme $\Omega(E, N)$ für dieses System? Berechnen Sie $\Omega(E, N)$ für $N \gg 1$.
Achtung: Im Gegensatz zu Teilchen im Gas handelt es sich bei $\vec{q}_i$ um unterscheidbare Freiheitsgrade, die einem bestimmten Gitterplatz zugeordnet werden können. Was ändert sich dadurch im Ausdruck der Zustandssumme?

(b) Berechnen Sie die mikrokanonische Entropie $S(E, N)$ des Systems und leiten Sie daraus die Temperatur T und die kalorische Zustandsgleichung $E(T, N)$ ab.

(c) Berechnen Sie die Wärmekapazität des Systems und vergleichen Sie das Ergebnis mit C_V für ein ideales Gas mit $H(\underline{q}, \underline{p}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m}$. Erklären sie das Resultat.

(d) Berechnen Sie die mikrokanonischen Erwartungswerte der kinetischen $\left(\bar{E}_{\text{kin}} = \langle \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i^{\,2}/(2m) \rangle_{\text{MK}}\right)$ und der potentiellen $\left(\bar{E}_{\text{pot}} = \langle \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m\omega^2 \vec{q}_i^{\,2} \rangle_{\text{MK}}\right)$ Energie des Systems als Funktion der Temperatur und vergleichen Sie die entsprechenden Ergebnisse.

12. Mischentropie

Betrachten Sie einen isolierten Behälter mit Gesamtvolumen $V = V_A + V_B$, der durch eine Wand in zwei Kammern mit Volumen V_A und V_B geteilt ist. In der ersten Kammer befindet sich ein (ideales) Gas mit N_A Teilchen der Sorte A, in der zweiten Kammer ein (ideales) Gas mit N_B Teilchen der Sorte B. Für jede Kammer sei eine fixe Energie (E_A und E_B) vorgegeben.

(a) Zeigen Sie, dass ausgehend von der mikrokanonischen Zustandssumme, die Gesamtentropie des System geschrieben werden kann als

$$S = k_B \left[N_A \ln\left(\frac{V_A}{N_A}\right) + N_B \ln\left(\frac{V_B}{N_B}\right)\right] + \bar{S}, \tag{3}$$

wobei $\bar{S}$ ein Beitrag zur Entropie ist, der nicht vom Volumen abhängt.

(b) Es wird nun die Trennwand entfernt und die Gase durchmischen sich im Gesamtvolumen V. Berechnen Sie die Änderung der Entropie ΔS die sich durch diese Durchmischung ergibt. Zeigen Sie weiteres, dass für zwei idente Gase mit $N_A/V_A = N_B/V_B = N/V$ diese Mischentropie verschwindet.

(c) Berechnen Sie nun nochmals die Mischentropie ΔS, diesmal aber ohne den Boltzmannfaktor $N!$ in der Zustandssumme einzuführen. Zeigen Sie, dass diese Rechnung für verschieden Gase zum gleichen Ergebnis führt, aber für die Druchmischung von identen Gas das Ergebnis $\Delta S > 0$ führt (Gibb'sches Paradoxon).

Hinweis: Benutzen Sie für diese Aufgabe die Resultate zur Herleitung der Sackur-Tetrode Formel aus der Vorlesung.

Kreuze für: 10(a); 10(b); 11(a-b); 11(c-d); 12(a-b); 12(c)