Statistische Physik I (SS 2020): Tutorium 5

13. Ultrarelativistisches klassisches Gas

Betrachten Sie ein klassisches Gas aus N nichtwechselwirkenden Teilchen in einem Volumen V. Die Bewegung der Teilchen ist ultrarelativistisch und wird durch die Hamiltonfunktion

$$H(\underline{q}, \underline{p}) = \sum_{i=1}^{N} c|\vec{p}_i|, \tag{1}$$

beschrieben, wobei $\vec{p}_i = (p_{i,x}, p_{i,y}, p_{i,z})$ den Impuls des i-ten Teilchens bezeichnet.

(a) Wie lautet die kanonische Phasenraumdichte für das ultrarelativistische Gas? Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme Z_{K}.

(b) Berechnen Sie die freie Energie $F(T, V, N)$ und die Entropie $S(T, V, N)$ für $N \gg 1$. Erfüllt die Entropie den 3. Hauptsatz der Thermodynamik? Wie lauten die kalorische Zustandsgleichung $E(T, V, N)$ und die thermische Zustandsgleichung $p(T, V, N)$ für ein ultrarelativistisches Gas?

(c) **Freiwillige Zusatzaufgabe:** Berechnen Sie nun auch die mikrokanonische Zustandssumme $\Omega(E, N, V)$ und die mikrokanonische Entropie $S(E, V, N)$. Zeigen Sie, dass das Resultat für große N mit der Berechnung aus Aufgabe (b) übereinstimmt.

Bemerkung: Diese Aufgabe illustriert, dass für große N die mikrokanonische und die kanonische Beschreibung ident sind, es aber in der Praxis gewöhnlich einfacher ist, Berechnungen mit der kanonischen Phasenraumdichte durchzuführen.

14. Das Tonks Gas: harte Kugeln in 1D

Betrachten Sie ein Gas von N harten Kugeln (Tonks Gas) in einer Dimension. Die harten Kugeln haben einen Durchmesser von ℓ und wechselwirken ansonsten nicht miteinander. Die entsprechende Hamiltonfunktion lautet:

$$H(\underline{x}, \underline{p}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i=2}^{N} \mathcal{V}_{\mathrm{hart}}(|x_i - x_{i-1}|),$$

wobei $\mathcal{V}_{\mathrm{hart}}(|x|) = \infty$ für $|x| \leq \ell$ und $\mathcal{V}_{\mathrm{hart}}(|x|) = 0$ für $|x| > \ell$.

(a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme $Z_K(T, V, N)$ des Tonks Gases in einer Dimension (mit $V \equiv L$, die lineare Größe des Systems). *Hinweis:* Zur Berechnung des Volumsintegrals, machen Sie eine Skizze einer konkreten Anordnung von Kugeln mit $x_{i+1} > x_i$. Welches Volumen steht für die erste Kugel für gegebene Positionen $x_2, \ldots, x_N$ der restlichen Kugeln zur Verfügung? Welche Integrationsgrenzen ergeben sich für x_2, usw.

(b) Berechnen Sie die Helmholtz Freie Energie $F(T,V,N)$ und die Entropie $S(T,V,N)$ des Systems, und leiten Sie auch die thermische und kalorische Zustandsgleichungen her. Interpretieren Sie die Ergebnisse durch einen Vergleich mit den entsprechenden Ausdrücken für ein ideales und ein van der Waals Gas.

15. Großkanonisches Ensemble

(a) Zeigen Sie, dass für das großkanonische Ensemble aus der Definition der Entropie $S = -k_B \langle \ln \rho_G \rangle$ und dem großkanonischen Potential $J = -k_B T \ln Z_G$ die allgemeine Relation

$$S = -\left(\frac{\partial J}{\partial T}\right)_{V,\mu} \tag{2}$$

folgt.

(b) Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme Z_G und daraus $J(T,V,\mu)$ und $N(T,V,\mu)$ für ein ideales Gas (in einem 3D Behälter mit Volumen V) und verifizieren Sie die thermische Zustandsgleichung. Bestimmen Sie $\mu(T,V,N)$ und skizzieren Sie $\mu(T)$ als Funktion der Temperatur. *Hinweis:* Verwenden Sie $\lambda_T = \sqrt{h^2/(2\pi m k_B T)}$ zur Vereinfachung der Resultate.

(c) Drücken Sie die Varianz der Teilchenzahl $(\Delta N)^2 = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2$ in einem großkanonischen Ensemble durch die 2. Ableitung von $\ln Z_G$ aus und zeigen Sie, dass für ein ideales Gas

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}}. \tag{3}$$

Bemerkung: Das großkanonische Ensemble wird in der nächsten Vorlesung mit dem 22.4. als regulärem Termin behandelt. Die Folien und das Video dazu werden aber schon eine Woche früher im TISS bereitgestellt.

Kreuze für: 13(a); 13(b); 14(a)+(b); 15(a); 15(b); 15(c)