Statistische Physik I (SS 2020): Tutorium 7

19. Zwei-Moden-Verschränkung

Gegeben sei ein System aus zwei harmonischen Oszillatoren mit Frequenzen ω_A und ω_B und mit jeweiligen Basiszuständen $|n\rangle_A$ und $|n\rangle_B$. Der Dichteoperator des Gesamtsystems sei

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|, \qquad |\Psi\rangle = \sqrt{1-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{\frac{n}{2}}\,|n\rangle_A \otimes |n\rangle_B, \qquad 0 < \lambda < 1. \tag{1}$$

(a) Berechnen Sie den reduzierten Dichteoperator $\hat{\rho}_A$ des Subsystems A. Vergleichen Sie $\hat{\rho}_A$ mit dem kanonischen Dichteoperator eines einzelnen harmonischen Oszillators aus der Vorlesung. Welche "Temperatur" kann $\hat{\rho}_A$ zugeordnet werden?

(b) Sind $\hat{\rho}$ und $\hat{\rho}_A$ rein oder gemischt? Berechnen Sie die Entropie von $\hat{\rho}$ und von $\hat{\rho}_A$.

20. Variationsrechnung: quartisches Potential

Gegeben Sei ein 1D *klassisches* Gas mit $N \gg 1$ Teilchen in einem quartischen Potential. Die Hamiltonfunktion ist durch

$$H(\underline{q}, \underline{p}) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{p_i^2}{2m} + \Lambda q_i^4\right) \tag{2}$$

gegeben. Für dieses Problem soll die freie Energie F durch Variationsrechnung approximativ bestimmt werden. Betrachten Sie dazu das einfachere Testsystem mit Hamiltonfunktion

$$H^*(\underline{q}, \underline{p}) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_*^2 q_i^2\right), \tag{3}$$

und einer variablen Fallenfrequenz ω_*.

(a) Berechnen Sie zuerst die kanonische Zustandssumme Z_{K}^* und die freie Energie F^* für das einfache harmonische System $H^*(\underline{q}, \underline{p})$.

(b) Bestimmen Sie aus der Ungleichung (siehe Vorlesung)

$$F < F^* + \langle H - H^*\rangle_{\rho^*} \tag{4}$$

einen approximativen Ausdruck für die freie Energie F, indem Sie die rechte Seite als Funktion von ω_* minimieren, d.h. $F \approx F_{\mathrm{ap}} = \min\{F^* + \langle H - H^*\rangle_{\rho^*} | \omega_* > 0\}$.

(c) Berechnen Sie nun auch die exakte kanonische Zustandssumme Z_{K} und die freie Energie F für das Gas im quartischen Potential [Gleichung (2)] und vergleichen Sie das Ergebnis für F mit dem Resultat der Variationsrechnung.

Hinweis:
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^4 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = 3\sigma^4, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^4} = \frac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{4}) \approx 1.81.$$

21. Fermi-Gas in verschiedenen Dimensionen

Betrachten Sie ein nicht-wechselwirkendes und nicht-relativistisches Fermi Gas in einer d-dimensionalen Box mit Volumen $V = L^d$ und Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{d} \frac{\hat{p}_{\alpha,i}^2}{2m}.$$

(a) Berechnen Sie explizit die Zustandsdichte $D(E)$ des Gases als Funktion der Dimension d und vergleichen Sie das Resultat mit dem in der Vorlesung hergeleiteten Ausdruck für $d = 3$. Skizzieren den Verlauf von $D(E)$ für kleine Energien für $d = 1, 2, 3, 4$. Gibt es qualitative Unterschiede?

(b) Bestimmen Sie die Fermi-Energie E_F des Systems als Funktion von N und d und berechnen Sie danach die innere Energie des nicht-relativistischen Fermi Systems in d Dimensionen bei $T = 0$.

(c) Betrachten Sie nun den Fall eines ultrarelativistischen Fermi-Gases in d Dimensionen mit Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N} c\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{d} \hat{p}_{\alpha,i}^2}\ .$$

Berechnen Sie auch für dieses System die Zustandsdichte $D(E)$ und die Fermi-Energie E_F als Funkion von N und d. Berechnen Sie auch die innere Energie des ultrarelativistischen Fermi-Gases in d Dimensionen bei $T = 0$.

Kreuze für: 19a)+b); 20a)+b); 20c); 21a); 21b); 21c)