Statistische Physik I (SS 2020): Tutorium 8

22. Neutronenstern

Ein Neutronenstern besteht aus einem entarteten Gas aus N Neutronen, der rein durch den Entartungsdruck gegen den gravitativen Kollaps stabilsiert wird. Unter der vereinfachten Annahme eines kugelförmigen Sterns mit Volumen $V = 4\pi R^3/3$ und einer homogenen Dichte $n = N/V$ ist die Gesamtenergie des Neutronensterns durch

$$U_{\mathrm{ges}}(R) = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} + U_n(R) \tag{1}$$

gegeben, wobei $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}^3\,\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{s}^{-2}$ die Gravitationskonstante und M die Masse des Neutronensterns bezeichnet. Die Neutronen können nicht-relativistisch behandelt werden und die Energie $U_n(R)$ des Neutronengases kann daher durch die Grundzustandsenergie eines idealen Fermigases mit Masse $m_n \simeq 1.67 \times 10^{-27}$ kg und Spin $S = 1/2$ approximiert werden (siehe Vorlesung).

Berechnen Sie durch Minimieren der Gesamtenergie den Radius R eines Neutronensterns mit der Masse der Sonne, $M = M_\odot \simeq 2 \times 10^{30}$ kg.

Bemerkung. Aus einer vollständigen relativistischen Beschreibung dieses Problems ergibt sich eine maximale Masse $M_C \approx 1.4\,M_\odot$, oberhalb derer auch der Entartungdruck nicht mehr ausreicht, um einen Neutronenstern zu stabilisieren $\to$ schwarzes Loch.

23. Fermi-Gas in einer 2D harmonischen Falle

Ein Gas aus Fermionen mit Spin S sein in einem 2D harmonischen Fallenpotential mit Fallenfrequenz ω eingeschlossen.

(a) Berechnen Sie die Zustandsdichte $D(E)$ für dieses System.

(b) Leiten Sie für diesen Fall einen Ausdruck für die Teilchenzahl N und für die innere Energie U her. Drücken Sie das Resultat mit Hilfe der Fermi-Integrale $f_\alpha(z)$ aus.

(c) Berechnen Sie die Fermi-Energie E_F und $U(N, T \to 0)$.

(d) Berechnen Sie das chemische Potential $\mu(T)$ und die innere Energie $U(T)$ mit Hilfe der Sommerfeld-Entwicklung als Funktion von E_F und bis zur Ordnung T^2.

24. Kondensation im Schwerefeld

Ein Gas aus N Bosonen mit Masse m und Spin $S = 0$ sei in einem offenen Behälter mit Grundfläche $A = L \times L$ in der (x, y)-Ebene eingeschlossen. In z-Richtung wird das Gas durch eine harte Wand bei

$z = 0$ und nach oben hin durch die Gravitationskraft gebunden. Die Einteilchen-Energieeigenwerte sind für dieses Problem in guter Näherung durch

$$E_{\vec{n}} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \left(n_x^2 + n_y^2\right) + mgh_0 n_z^{\frac{2}{3}}, \qquad h_0 = \left(\frac{9\pi^2\hbar^2}{8m^2 g}\right)^{\frac{1}{3}}, \tag{2}$$

gegeben, wobei $n_{x,y} \in \mathbb{Z}$, $n_z = 1, 2, \dots, \infty$ und $g \simeq 9.81$ m/s^2.

(a) Vergleichen Sie die Verteilung der Energieeigenwerte $E_{\vec{n}}$ mit denen eines Teilchens in einer 3D Box und argumentieren Sie rein qualitativ, warum es auch in diesem Fall zu einer Bose-Einstein-Kondensation kommen kann.

(b) Leiten Sie aus Gleichung (2) die Zustandsdichte

$$D(E) = \frac{A}{2\pi}\frac{m}{\hbar^2}\left(\frac{E}{mgh_0}\right)^{\frac{3}{2}} = KE^{\frac{3}{2}} \tag{3}$$

für dieses System ab.

(c) Berechnen Sie einen Ausdruck für die Teilchenzahl N und die Kondensationstemperatur T_c für das Bose Gas im Schwerefeld. Schreiben Sie das Resultat als

$$\frac{T_c}{T_g} = \eta \times \left(\frac{h_0^2}{A} N\right)^{\gamma}, \tag{4}$$

wobei $T_g = (mgh_0)/k_B$, und bestimmen Sie die numerischen Koeffizienten η und γ.

(d) Berechnen Sie h_0, T_g und T_c für ein Gas aus $N = 10^5$ Rubidium Atomen der Masse $m = 85$ amu und für $L = 100\,\mu$m.

Kreuze für: 22; 23 a)+b); 23 c); 23 d); 24 a)+b); 24 c)+d)