Statistische Physik I (SS 2020): Tutorium 9

25. Spin-1/2 Fermionen im magnetischen Feld

Betrachten Sie N nichtwechselwirkenden Fermionen mit Spin $S = 1/2$ im Volumen V. Im Gegensatz zur Vorlesung soll hier die Energieaufspaltung der Spinzustände mit $m_s = \pm 1/2$ in einem äußeren Magnetfeld B berücksichtigt werden. D.h.

$$E_{\vec{k},m_s} = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} + 2\mu_B B m_s, \tag{1}$$

wobei μ_B das Bohrsche Magenton bezeichnet.

Berechnen Sie für $T = 0$ und unter der Annahme $\mu_B B \ll E_F$ die Magnetisierung $M(B) = \mu_B(N_+ - N_-)$, wobei N_+ und N_- die Zahl der Fermionen in den Spinzuständen $m_s = \pm 1/2$ bezeichnen. Verwenden Sie dazu, dass $|N_+ - N_-| \ll N_+ + N_- = N$. Berechnen Sie auch die entsprechende magnetische Suszeptibilität: $\chi = \left(\frac{\partial M}{\partial B}\right)\big|_{V,N}$ bei $T = 0$.

26. Verdünnte Quantengasen

Wir betrachten hier ideale bosonische und fermionische Quantengase im klassischen Grenzfall (hohe Temperatur T, niedrige Dichte n), deren thermische Zustandsgleichung in der VO inklusive des ersten Korrekturterms $\sim n\lambda_T^3$ für kleine z abgleitet wurde.

(a) Betrachten Sie zuerst ein einkomponentiges Bosegas mit Masse M. Berechnen Sie quantenmechanischen Korrekturen zur thermischen Zustandsgleichung bis zur Ordnung $(n\lambda_T^3)^2$.

(b) Betrachten Sie nun ein Gemisch aus zwei idealen Bosongasen mit Spin $S = 0$ und Massen M_I und $M_\text{II} \neq M_\text{I}$ sowie Teichenzahlen N_I und N_II. Das Gemisch befindet sich in einem Gefäß mit Volumen V und konstanter Temperatur T. Berechnen Sie den Druck dieser Gasmischung $P_{\text{I+II}}$ aus der entsprechenden thermischen Zustandsgleichung im klassischen Grenzfall unter Berücksichtigung des *ersten* Korrekturterms.

(c) Betrachten Sie nun den Fall $N_\text{I} = N_\text{II} = N/2$ und den Limes $M_\text{II} \to M_\text{I}$. Vergleichen Sie den resultierenden Druck in dieser Situation mit dem Druck eines einkomponentigen Bosegases mit Masse M_I und Teilchenzahl $N_\text{I} = N$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

(d) Wiederholen Sie die Aufgaben **(b)** und **(c)** für ein Gemisch aus zwei fermionischen Gasen mit Spin $\frac{1}{2}$ und Massen m_1 und m_2.

27. Photonengas

Das Strahlungsfeld in einem Hohlraum mit Volumen $V = L^3$ wird durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H}_{\mathrm{EM}} = \sum_k \hbar\omega_k \, \hat{a}_k^\dagger a_k, \qquad k \equiv (\lambda, \vec{k}), \tag{2}$$

beschrieben, woraus sich die freie Energie

$$F(T,V) = -\frac{4\sigma}{3c} V T^4, \qquad \sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^2}, \tag{3}$$

(σ ist die Stefan-Boltzmann-Konstante) ableiten lässt (siehe Vorlesung).

(a) Berechnen Sie, ausgehend von $F(T,V)$, den Druck, die Entropie und die innere Energie des Photonengases und zeigen Sie dann mit Hilfe der Gibbs-Duhem Relation, dass $\mu = 0$.

(b) Berechnen Sie die mittlere Photonenzahl $N = \sum_k \langle \hat{n}_k \rangle$ und zeigen Sie die folgende Relation

$$pV \approx 0.90 \times N k_B T. \tag{4}$$

D.h., Photonen erzeugen einen ähnlich großen Druck wie massive Teilchen, allerdings ist die Teilchendichte eines Photongases unter gewöhnlichen Bedingungen sehr gering. Berechnen Sie N/V und p für eine Photonengas bei Raumtemperatur und für $T = 10^7$ K (entspricht in etwa der Temperatur im Inneren der Sonne oder der Temperatur während einer Atombombenexplosion).

(c) Nehmen Sie nun an, das quantisierte elektromagnetische Feld sei durch perfekte metallische Spiegel auf eine (1D) bzw. zwei (2D) Ausbreitungsrichungen beschränkt. In diesem Fall kann der Summationsindex in $\hat{H}_{\mathrm{EM}}$ auf $k = k_x$ bzw. $k = (k_x, k_y)$ eingeschränkt werden (der Polarisationsfreiheitsgrad entfällt). Berechnen Sie mit diesen Annahmen die freien Energien $F_{\mathrm{1D}}(L,T)$ und $F_{\mathrm{2D}}(A = L^2, T)$ für niedrigdimensionale Photonengase.

Kreuze für: 25; 26 a); 26 b)+c)+d); 27 a); 27 b); 27 c)