1 Vollständiges Differential

(a) Zeigen Sie, dass das folgende Differential nicht vollständig ist:

$$\delta f(x,y) = p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy$$

mit $p(x,y) = -xy$ und $q(x,y) = 2xy^2$.

(b) Finden Sie den integrierenden Faktor $\alpha(xy)$, sodass

$$dg(x,y) = \alpha(xy)\,\delta f = \alpha(xy)\,p(x,y)\,dx + \alpha(xy)\,q(x,y)\,dy$$

ein vollständiges Differential ist.

(c) Geben Sie das dazugehörige Potential $g(x,y)$ an.

2 Lagrange Faktor

(a) Seien f und g stetig differenzierbare Funktionen von x und y. Zeigen Sie, dass

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_g = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x^{-1}.$$

(b) Sei nun f stationär unter konstantem g. Zeigen Sie dass es einen Skalar λ gibt, sodass $f - \lambda g$ auch stationär ist und geben Sie λ explizit an.

3 Legendre Transformation

Sei $f(x)$ eine stetig differenzierbare konvexe Funktion auf dem Interval I. Die Legendre transformierte Funktion $f^*(x^*)$ ist gegeben durch

$$f^*(x^*) = \max_{x \in I} \left(x^* x - f(x)\right).$$

(a) Sei $g(x) = -\log(\sqrt{x})$ auf dem Interval $I = (0, \infty)$. Berechnen Sie $g^*(x^*)$, den Definitionsbereich I^* von g^*, sowie $g^{**}(x^{**}) = (g^*)^*(x^{**})$.

(b) Zeigen Sie, dass die Ableitungen von f und f^* für stetig differenzierbare konvexe Funktionen immer invers zueinander sind: $(f^*)' = (f')^{-1}$.

4 Entropie eines Schwarzen Loches

Aufgrund des Unruh Effekts emittiert ein nicht-rotierendes, ungeladenes Schwarzes Loch der Masse M thermische Schwarzkörperstrahlung entsprechend der Temperatur

$$T = \frac{\hbar c^3}{G k_\mathrm{B}} \frac{1}{8\pi M}.$$

Nehmen Sie an, dass zugeführte Wärme nur in Form von Masse aufgenommen werden kann $\delta Q = c^2 \delta M$, wenn es keine anderen internen Freiheitsgrade gibt. Zeigen Sie, dass unter dieser Annahme die Entropie nur von der Fläche des Ereignishorizontes A abhängt:

$$S = k_\mathrm{B} \frac{c^3}{\hbar G} \frac{A}{4}$$

mit $A = 4\pi r_\mathrm{s}^2$ und $r_\mathrm{s} = 2GM/c^2$.