13 Eigenschaften des idealen Gases (Testbeispiel 2018)

Die freie Energie des idealen Gases ist gegeben durch

$$F(T, V, N) = -k_{\mathrm{B}} T \log \left(\frac{V^N (cT)^{3N/2}}{N!} \right),$$

wobei c eine (unwichtige) Konstante ist.

(a) Zeigen Sie, dass es sich bei der freien Energie im Grenzfall großer Teilchenzahlen N um eine extensive Größe handelt.

(b) Berechnen Sie die Entropie $S(T, V, N)$ als Funktion von T, V, N.

(c) Berechnen Sie die kalorische Zustandsgleichung und zeigen Sie, dass $E(T, V, N)$ nicht vom Volumen V abhängt. Wie kann man dieses Resultat physikalisch erklären.

(d) In einem reversiblen Prozess werden $X = pV^2$ und die Teilchenzahl N konstant gehalten. Berechnen Sie die zugehörige Wärmekapazität $C_X = (\partial Q/\partial T)_{X,N}$.

14 Ideales Gas in harmonischer Falle (Testbeispiel 2018)

Ein ideales Gas aus N Teilchen der Masse m sei in einer dreidimensionalen harmonischen Falle mit Kreisfrequenz ω gefangen.

(a) Wie lautet die zugehörige Hamiltonfunktion?

(b) Bestimmen Sie die mikrokanonische Zustandssumme über die infinitesimal dünne Energieschale

$$\Omega = \frac{1}{N! h^{3N}} \int d^{3N} q \int d^{3N} p \, \delta \left(H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) - E \right).$$

(c) In einem reversiblen Prozess werde die Kreisfrequenz der harmonischen Falle von ω auf $\omega' = \omega/2$ reduziert, während die innere Energie und die Teilchenzahl konstant bleiben. Berechnen Sie die Entropiedifferenz ΔS zwischen Anfangs- und Endzustand.

15 Isolierte Teilsysteme (Testbeispiel 2018)

Eine thermisch isolierte **zwei**dimensionale Box mit idealem Gas werde durch eine unbewegliche Trennwand in zwei Teilsysteme mit gleicher Teilchensorte, gleicher Energie E und gleicher Teilchenzahl N, aber unterschiedlicher Flächen A_1 und A_2 geteilt. Die Trennwand sei wärme**un**durchlässig, weshalb die Teilsysteme nicht in thermischen Kontakt stehen.

(a) Betrachten Sie zunächst nur das erste Teilsystem und berechnen Sie dessen mikrokanonische Zustandssumme $\Omega(E, A_1, N)$.

(b) Berechnen Sie für das erste Teilsystem die Entropie $S(T, A_1, N)$ für sehr große Teilchenzahlen N.

(c) Nun werde die Trennwand entfernt und ein neuer Gleichgewichtszustand stellt sich ein. Zeigen Sie, dass die daraus resultierende Entropieänderung des Gesamtsystems gegeben ist durch

$$\Delta S = 2N k_{\mathrm{B}} \log \left(\frac{\overline{A}_{\mathrm{a}}}{\overline{A}_{\mathrm{g}}} \right),$$

wobei $\overline{A}_{\mathrm{a}} = (A_1 + A_2)/2$ das arithmetische Mittel und $\overline{A}_{\mathrm{g}} = (A_1 A_2)^{1/2}$ das geometrische Mittel der beiden Flächen bezeichnet. Unter welcher Bedingung handelt es sich um einen reversiblen Prozess?

16 Galaktisches Zentrum

Wir betrachten den zentralen Bereich einer Galaxie, wo Sterne der Masse m das sehr viel schwerere, im Ursprung befindliche galaktische Zentrum der Masse M umkreisen. Wir nehmen an, dass alle Sterne gleiche Masse haben. Die Hamiltonfunktion eines Sternes ist

$$H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = -\frac{GMm}{q} + \frac{p^2}{2m} \qquad \text{mit } q = |\boldsymbol{q}|, p = |\boldsymbol{p}|.$$

Für umlaufende Sterne ist $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) < 0$.

(a) Die Sterne bewegen sich in einer Ebene aber ohne bestimmten Umlaufsinn. Zeigen Sie, dass die Fläche der infinitesimalen Energieschale von umlaufenden Sternen mit Energie E gegeben ist durch

$$\phi^{2\mathrm{D}}(E) = \int d^2q \int d^2p \, \delta\left(H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) - E\right) = 2m \left(\frac{\pi GMm}{-E}\right)^2.$$

Welche Einheit hat $\phi^{2\mathrm{D}}(E)$?
Hinweis: Integrieren Sie zuerst die Impulskoordinaten, dann die Ortskoordinaten.

(b) Die Sterne bewegen sich nun im ganzen Raum. Zeigen Sie, dass die Fläche der Energieschale dann gegeben ist durch:

$$\phi^{3\mathrm{D}}(E) = \int d^3q \int d^3p \, \delta\left(H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) - E\right) = m\sqrt{-2mE} \left(\frac{\pi GMm}{-E}\right)^3.$$

(c) Angenommen, die Wahrscheinlichkeitsdichte einen Stern mit Energie E zu finden sei proportional zur Fläche der Energieschale $\phi^{3\mathrm{D}}(E)$. Zeigen Sie, dass sich daraus ein Zusammenhang zwischen dem Erwartungswert der kinetischen Energie und der maximal auftretenden Gesamtenergie ergibt: $\langle T \rangle = -3E_{\max}$.
Hinweis: Verwenden Sie das Virialtheorem.

Formelsammlung:

$$N! \approx N^N e^{-N}$$

$$\int dx \, f(x) \, \delta(g(x)) = \frac{f(x_0)}{|g'(x_0)|} \quad \text{mit } g(x_0) = 0$$

$$\int d\xi_1 \dots d\xi_n \, \delta\left(c_1\xi_1^2 + \dots + c_n\xi_n^2 - z\right) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{\pi^n}{c_1 \dots c_n}\right)^{1/2} z^{\frac{n}{2}-1} \quad \text{mit } c_i > 0, z > 0$$