Wichtig

- Schreiben Sie **Name und Matrikelnummer** auf alle Seiten ihrer Abgabe.
- Nummerieren Sie alle Seiten Ihrer Abgabe in der Form **1/N**, **2/N**, ..., **N/N**. Die Gesamtzahl N können Sie womöglich erst am Schluss eintragen, vergessen Sie jedoch nicht darauf.
- Geben Sie die unterschriebene eidesstattliche Erkärung als erste Seite ab. Seite $1/N$ beginnt nach der eidesstattlichen Erklärung.
- Falls Sie diese Angabe ausgedruckt haben, bitte geben Sie **keine** Antworten zu Aufgaben 1–4 auf diese Angabeblätter. Wir erhalten diese gar nicht.

Viel Erfolg!

1 Homogene Funktionen (10 Punkte)

(a) Sei $f(x, y, z)$ eine Funktion in drei reellen Variablen. Definieren Sie, unter welcher Bedingung $f(x, y, z)$ homogen vom Grad k ist. (1P)

(b) Seien X und Y extensive thermodynamische Größen. Berechnen Sie den Grad der Homogenität folgender Funktionen: (i) X/Y und (ii) $Y\,\partial \ln(X)/\partial Y$. (3P)

(c) Geben Sie die Fundamentalgleichung der Thermodynamik in integrierter Form an und beweisen Sie diese Form ausgehend von der differentiellen Form $dE = TdS - pdV + \mu dN$. Welche Eigenschaft von E benötigt man? (6P)

2 Gummiband (12 Punkte)

Die innere Energie eines Gummibandes der Länge L mit N Molekülen sei $E(S, L, N) = \theta S^2 L/N^2$ mit der Konstanten θ.

(a) Bestimmen Sie das chemische Potential $\mu(T, l)$ als Funktion der Temperatur und der Länge pro Molekül $l = L/N$. (6P)

(b) Was besagt die Gibbs–Duhem Relation? Beweisen Sie explizit deren Gültigkeit mit μ als Funktion von Temperatur und Spannung. (6P)

3 Teilchen im homogenen Gravitationsfeld (14 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich im homogenen Schwerefeld der Erde. Es ist begrenzt durch eine nach oben offene Box B mit ebener Grundfläche A bei $q_z = 0$. Die Hamiltonfunktion des Teilchens ist

$$H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = mgq_z + \frac{p^2}{2m} \qquad \text{mit } p = |\boldsymbol{p}|.$$

(a) Zeigen Sie, dass sich für die mikrokanonische Zustandssumme $\Omega(E, A, N = 1)$ für ein Teilchen der Energie E das folgende Ergebnis ergibt: (6P)

$$\Omega(E, A, N = 1) = \frac{1}{h^3} \int_B d^3q \int d^3p\, \delta\left(H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) - E\right) = \frac{4\pi A \sqrt{(2E)^3 m}}{3gh^3}.$$

(b) Zeigen Sie allgemein, dass die mikrokanonische Zustandssumme zweier ununterscheidbaren Teilchen ohne Wechselwirkung

$$\Omega(E, A, N = 2) = \frac{1}{2!h^6} \int_B d^3q_1 \int_B d^3q_2 \int d^3p_1 \int d^3p_2\, \delta\left(H(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{p}_1) + H(\boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{p}_2) - E\right)$$

durch eine Faltung der Einteilchenzustandssumme $\Omega(E, A, 1)$ berechnet werden kann: (3P)

$$\Omega(E, A, N = 2) = \frac{1}{2} \int_0^E dE_1\, \Omega(E_1, A, 1)\, \Omega(E - E_1, A, 1).$$

(c) Die Faltung ergibt $\Omega(E, A, N = 2) = \pi^3 A^2 E^4 m/6g^2 h^6$. Geben Sie die Entropie des Zweiteilchensystems $S(E, A, N = 2)$ als Funktion von E und A an und berechnen Sie damit die Wärmekapazität bei konstanter Grundfläche C_A. (5P)

4 Kreisprozesse (14 Punkte)

N Teilchen eines idealen Gases bei Temperatur T_A befinden sich im Volumen V_A. Das Gas durchläuft 3 Prozesse wie folgt:

1. $A \to B$: thermisch isoliert expandiert das Gas plötzlich von V_A auf $V_B > V_A$ durch Entfernen einer Trennwand zu Vakuum.
2. $B \to C$: das Gas bleibt thermisch isoliert und wird adiabatisch reversibel wieder auf das Volumen V_A komprimiert.
3. $C \to A$: das Gas wird mit einem Wärmebad in Kontakt gebracht und isochor reversibel auf die Anfangstemperatur T_A abgekühlt.

Beantworten Sie folgende Fragen:

(a) Skizzieren Sie den Prozess im pV-Diagramm und finden Sie T_B, T_C, sowie p_A, p_B und p_C jeweils als Funktion von T_A, V_A, V_B. (6P)

(b) Berechnen Sie die insgesamt zu- oder abgeführte Wärme ΔQ. Welches Vorzeichen hat ΔQ? (3P)

(c) Bestimmen Sie ΔS_1, ΔS_2, ΔS_3 für jeden Prozessschritt. Argumentieren Sie explizit mit Hilfe des zweiten Hauptsatzes, ob der Prozess $A \to B$ reversibel oder irreversibel ist. (5P)

Formelsammlung:

$$\int dx\, f(x)\, \delta(g(x)) = \sum_n \frac{f(x_n)}{|g'(x_n)|} \quad \text{mit } g(x_n) = 0 \qquad \text{(Auswertung der Dirac Delta Funktion)}$$

$$S(T, V, N) = k_\mathrm{B} N \left\{ \ln \left[\frac{V}{N} \left(\frac{2\pi m k_\mathrm{B} T}{h^2} \right)^{3/2} \right] + \frac{5}{2} \right\}$$

(Sackur–Tetrode Gleichung des idealen Gases)