Wichtig

- Schreiben Sie **Name und Matrikelnummer** auf alle Seiten ihrer Abgabe.
- Nummerieren Sie alle Seiten Ihrer Abgabe in der Form **1/N**, **2/N**, ..., **N/N**. Die Gesamtzahl N können Sie womöglich erst am Schluss eintragen, vergessen Sie jedoch nicht darauf.
- Geben Sie die unterschriebene eidesstattliche Erkärung als erste Seite ab. Seite $1/N$ beginnt nach der eidesstattlichen Erklärung.
- Bitte keine Ausweise scannen.
- Falls Sie diese Angabe ausgedruckt haben, bitte geben Sie **keine** Antworten zu Aufgaben 1–4 auf diese Angabeblätter. Wir erhalten diese gar nicht.

Viel Erfolg!

1 Stabförmige Moleküle in nematischer Phase (14 Punkte)

In der nematischen Phase können sich stabförmige Moleküle an fixen Plätzen nur in zwei Richtungen ausrichten: parallel oder anti-parallel zu einer bestimmten Richtung, die die z-Achse sei. Sie können jedoch umklappen. Wir betrachten N Moleküle mit Dipolmoment D im elektrischen Feld $\boldsymbol{E} = \mathcal{E}\hat{\boldsymbol{z}}$ der Stärke $\mathcal{E}$ in z-Richtung. Die Hamiltonfunktion hänge nur von der Konfiguration $\underline{q}$ ab

$$H(\underline{q}) = -D\sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{q}_n \cdot \boldsymbol{E} \quad \text{mit } \underline{q} = (\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_N) \text{ und } \boldsymbol{q}_n \in \{-\hat{\boldsymbol{z}}, +\hat{\boldsymbol{z}}\}.$$

(a) Bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme Z_K und die Helmholtz freie Energie F als Funktion der elektrischen Feldstärke $\mathcal{E}$, der Temperatur T und der Anzahl an Molekülen N. Zeigen Sie, dass $F(\mathcal{E}, T, N) = -Nk_\mathrm{B}T\ln(2\cosh(D\mathcal{E}/k_\mathrm{B}T))$. (6P)

(b) Zeigen Sie, dass die mittlere Ausrichtung der Moleküle zur Richtung des elektrischen Feldes $\frac{1}{N}\langle\sum_n \boldsymbol{q}_n \cdot \hat{\boldsymbol{z}}\rangle$ gegeben ist durch $\tanh(D\mathcal{E}/k_\mathrm{B}T)$ (4P).

(c) Schreiben Sie den Ansatz an, wie man die Wärmekapazität $C_V(\mathcal{E}, T, N)$ aus der freien Energie finden kann. Geben Sie die Grenzwerte von C_V für $\mathcal{E} \to 0$ und $\mathcal{E} \to \infty$ bei fester Temperatur ohne Rechnung aber mit Begründung an. (4P)

2 Dichtematrizen von Quantensystemen (12 Punkte)

(a) Geben Sie alle 3 unabhängigen Eigenschaften an, die eine Dichtematrix $\hat{\rho}$ allgemein erfüllen muss. (3P)

(b) Unter welcher Bedingung ist eine Dichtematrix $\hat{\rho}$ zeitlich stationär in einem System mit dem Hamiltonoperator $\hat{H}$? (1P)

Der Zustand eines Systems aus zwei Spins ist durch die parametrisierte Dichtematrix $\hat{\rho}(\alpha) = \hat{A}(\alpha)/N(\alpha)$ in der Basis $\mathcal{B} = (|\uparrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle, |\downarrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle, |\uparrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle, |\downarrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle)$ gegeben mit

$$\hat{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

und $N(\alpha) \in \mathbb{R}$.

(c) Bestimmen Sie die Funktion $N(\alpha)$, sodass $\hat{\rho}(\alpha)$ normiert ist. (2P)

(d) Finden Sie α, sodass $\hat{\rho}(\alpha)$ einen reinen Zustand darstellt. (2P)

(e) Finden Sie die Teildichtematrizen $\hat{\rho}_1 = \mathrm{tr}_2\{\hat{\rho}(\alpha)\}$ und $\hat{\rho}_2 = \mathrm{tr}_1\{\hat{\rho}(\alpha)\}$ der beiden Systemteile mit $\mathrm{tr}_n\{\hat{\rho}\} = \langle\uparrow_n|\hat{\rho}|\uparrow_n\rangle + \langle\downarrow_n|\hat{\rho}|\downarrow_n\rangle$. (4P)

3 Superluminiszenz (14 Punkte)

In einerm Hohlraum befinden sich N Atome an festen Stellen. Wir betrachten nur zwei mögliche Zustände des n-ten Atoms: den Grundzustand $|0_n\rangle$ und einen angeregten Zustand $|1_n\rangle$. Die Atome wechselwirken nicht direkt miteinander, tauschen aber mit dem Hohlraum Energie in Form von Photonen aus. Wir modellieren den Vorgang durch ein thermisches Gleichgewicht und nehmen folgenden Hamiltonoperator zunächst für das System mit $N = 2$ Atomen an:

$$\hat{H} = \hat{H}_1 \otimes \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_1 \otimes \hat{H}_2 \quad \text{mit } \mathbb{1}_n = |0_n\rangle\langle 0_n| + |1_n\rangle\langle 1_n|$$

und dem Hamiltonoperator für das n-te Atom gegeben durch

$$\hat{H}_n = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & C/2 \\ C/2 & \varepsilon_1 \end{pmatrix}$$

in der Basis $\mathcal{B}_n = (|0_n\rangle, |1_n\rangle)$.

(a) Zeigen Sie, dass die kanonische Zustandssumme Z_K gegeben ist durch $\left(2e^{-\beta\tilde{\varepsilon}}\cosh(\beta\gamma/2)\right)^2$. mit $\tilde{\varepsilon} = (\varepsilon_0 + \varepsilon_1)/2$, $\gamma^2 = \Delta^2 + C^2$ und $\Delta = \varepsilon_1 - \varepsilon_0$. (7P)

(b) Zeigen Sie, dass die freie Energie des Systems für $T \gg \gamma/k_\mathrm{B}$ asymptotisch gegeben ist durch $F(T, N = 2) = 2\tilde{\varepsilon} - 2k_\mathrm{B}T\ln 2$. Berechnen Sie damit die Entropie $S(T, N = 2)$ für hohe Temperaturen. (7P)

(**Bonus**) Wir betrachten nun $N \gg 2$ Atome unter der Annahme, dass die Kopplung an die Photonen im Hohlraum mit der Anzahl an Atomen steigt, ausgedrückt durch den Hamiltonoperator für das n-te Atom

$$\hat{H}_n = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & NC/2 \\ NC/2 & \varepsilon_1 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie die kanonische Zustandssumme für das Gesamtsystem bestehend aus N identischen aber unterscheidbaren Atomen und zeigen Sie, dass die freie Energie $F(T, N)$ asymptotisch für große Werte von N nicht extensiv sondern proportional zu N^2 ist. (+4P)

4 Ideales Fermi Gas (10 Punkte)

(a) Leiten Sie die großkanonische Zustandssumme $Z_\mathrm{G} = \mathrm{tr}\{\exp[-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})]\}$ eines idealen Fermi Gases mit $\hat{H} = \sum_j e_j \hat{n}_j$ und $\hat{N} = \sum_j \hat{n}_j$ her. Leiten Sie daraus den Erwartungswert $\langle \hat{n}_j \rangle$ der Besetzungszahl des j-ten Zustands her. (6P)

(b) Skizzieren Sie $\langle \hat{n}_j \rangle$ als Funktion der Eigenenergie e_j für die drei Temperaturen $0 = T_0 < T_1 < \varepsilon_\mathrm{F}/k_\mathrm{B} < T_2$. Markieren Sie auch die Fermienergie ε_F im Diagramm. (4P)

Formelsammlung:

$$\ln(\cosh(x)) = \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4) \quad \text{für kleine } x$$