Wichtig

- Schreiben Sie **Name und Matrikelnummer** auf alle Seiten ihrer Abgabe.
- Nummerieren Sie alle Seiten Ihrer Abgabe in der Form **1/*N***, **2/*N***, ..., ***N*/*N***. Die Gesamtzahl N können Sie womöglich erst am Schluss eintragen, vergessen Sie jedoch nicht darauf.
- Geben Sie die unterschriebene eidesstattliche Erkärung als erste Seite ab. Seite $1/N$ beginnt nach der eidesstattlichen Erklärung.
- Bitte keine Ausweise scannen.
- Falls Sie diese Angabe ausgedruckt haben, bitte geben Sie **keine** Antworten auf diese Angabeblätter. Wir erhalten diese gar nicht.

Viel Erfolg!

1 Zustandsgleichungen (12 Punkte)

(a) Geben Sie die natürlichen Variablen der thermodynamischen Potentiale E, F, H und G an. Geben Sie alle Legendre Transformationen an, die Paare dieser Potentiale ineinander überführen. Die Transformation zwischen E und F lautet etwa: $F = E - ST$ mit S sodass $(\partial E/\partial S)_{V.N} = T$. (6P)

(b) Kalorische und thermische Zustandsgleichung eines Stoffes seien jeweils gegeben durch

$$E = \theta \frac{N^3 (k_\mathrm{B} T)^2}{V^2}, \qquad p = \frac{2E}{V}$$

mit der Konstante θ. Finden Sie die adiabatische Kompressibilität $\kappa_S = -(\partial V/\partial p)_{S,N}/V$ des Stoffes als Funktion von T, V und N und geben Sie deren Vorzeichen an. (6P)

2 Magnetische Dipole (14 Punkte)

In einem externen magnetischen Feld $\boldsymbol{B} = \mathcal{B}\hat{\boldsymbol{z}}$ der Stärke $\mathcal{B}$ in Richtung der z-Achse befinden sich N magnetische Dipole mit magnetischem Dipolmoment m an festen Positionen. Wir nehmen an, dass die Ausrichtungen $\boldsymbol{q}_n$ der Dipole nur parallel ($\boldsymbol{q}_n = +\hat{\boldsymbol{z}}$) oder anti-parallel ($\boldsymbol{q}_n = -\hat{\boldsymbol{z}}$) zur z-Achse möglich sind. Die Hamilton-Funktion lautet unter Vernachlässigung der kinetischen Energie

$$H(\underline{q}) = -m \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{q}_n \cdot \boldsymbol{B} \quad \text{mit } \underline{q} = (\boldsymbol{q}_1, \dots, \boldsymbol{q}_N) \text{ und } \boldsymbol{q}_n \in \{-\hat{\boldsymbol{z}}, +\hat{\boldsymbol{z}}\}.$$

Die Dipole seien zunächst isoliert und Wärmeaustausch findet keiner statt.

(a) k von N Dipolen seien parallel, die restlichen $N - k$ antiparallel zur z-Achse ausgerichtet. Finden Sie für jedes $k \in \{0, \dots, N\}$ die Energie E_k und die Anzahl an möglichen Mikrozuständen $\Omega(E_k, N)$. (6P)

(b) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme für das offene System mit Wärmeaustausch $Z_\mathrm{K} = \sum_k \Omega(E_k, N)\, e^{-\beta E_k}$ aus den mikrokanonischen Zustandssummen des isolierten Systems und zeigen Sie, dass $Z_\mathrm{K} = (2\cosh(m\mathcal{B}/k_\mathrm{B}T))^N$. (8P)

Bonus Für hinreichend große N können wir kontinuierliche Werte für Energie E und Entropie S des isolierten Systems annehmen. Zeigen Sie, dass es Werte von E gibt, für die die Temperatur *negativ* wird. (+4P)

3 Wechselwirkende Fermionen auf 2 Plätzen (14 Punkte)

Wir betrachten ein offenes System von Fermionen mit zwei möglichen Plätzen und vernachlässigen Spin. Wir geben den Zustand des Systems in der Besetzungszahlnotation $|n_1 n_2\rangle$ an. Das System kann daher nur vier verschiedene Fock-Zustände annehmen $\mathcal{B} = (|00\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |11\rangle)$. Wie im Tight-Binding Model geben wir die kinetische Energie zwischen Zuständen, die sich in der Position genau eines Fermions unterscheiden, durch den Parameter $t/2$ an:

$$\langle 10|\hat{H}|01\rangle = t/2.$$

Die potentielle Energie hängt nur von der Position der Fermionen ab:

$$\langle 10|\hat{H}|10\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle 01|\hat{H}|01\rangle = \varepsilon_2.$$

Wenn sich zwei Fermionen im System befinden, kommt zusätzlich noch die gegenseitige Abstoßungsenergie U hinzu

$$\langle 11|\hat{H}|11\rangle = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + U.$$

Alle anderen nicht-verschwindenen Elemente von $\hat{H}$ ergeben sich durch Vertauschung der beiden Plätze, die restlichen Elemente sind 0.

(a) Identifizieren Sie alle 5 nicht-verschwindenen Elemente des Hamiltonoperators $\hat{H}$ und geben Sie $\hat{H}$ in der Basis $\mathcal{B}$ als 4×4 Matrix an. Geben Sie auch den Anzahloperator $\hat{N}$ als Matrix in dieser Basis an. (4P)

(b) Zeigen Sie, dass die großkanonische Zustandssumme $Z_\mathrm{G} = \mathrm{tr}\{\exp[-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})]\}$ gegeben ist durch $1 + 2\cosh(\beta\gamma/2)\, e^{\xi} + e^{-\beta U} e^{2\xi}$ mit $\xi = -\beta(\tilde{\varepsilon} - \mu)$, $\tilde{\varepsilon} = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2$ und $\gamma^2 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + t^2$. (6P)

Hinweis: diagonalisieren Sie $(\hat{H} - \mu\hat{N})$ in Blöcken der Größe 1×1 und 2×2.

(c) Finden Sie den Erwartungswert der Anzahl an Fermionen $\langle \hat{N} \rangle$ und zeigen Sie, dass er durch $(2\cosh(\beta\gamma/2)\, e^{\xi} + 2\, e^{-\beta U} e^{2\xi})/Z_\mathrm{G}$ gegeben ist. (4P)

4 Ideales Bose Gas (10 Punkte)

(a) Leiten Sie die großkanonische Zustandssumme $Z_\mathrm{G} = \mathrm{tr}\{\exp[-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})]\}$ eines idealen Bose Gases mit $\hat{H} = \sum_j e_j \hat{n}_j$ und $\hat{N} = \sum_j \hat{n}_j$ her. Leiten Sie daraus den Erwartungswert $\langle \hat{n}_j \rangle$ der Besetzungszahl des j-ten Zustands her. (6P)

(b) Skizzieren Sie μ als Funktion der Temperatur T im Bereich von $T = 0$ bis zu Temperaturen, bei denen sich das ideale Bose Gas klassisch verhält. Markieren Sie auch die kritische Temperatur T_c. (4P)

Formelsammlung:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_g = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_g \qquad \forall f(x,y), g(x,y) \text{ stetig}$$

$$\ln(N!) \approx N \ln N \quad \text{für hinreichend große } N$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k\, q^{n-k} = (p+q)^n$$