**Gerhard Kahl & Florian Libisch**

# STATISTISCHE PHYSIK 1 (VU – 136.020)

## 1. Tutoriumstermin (18.3.2022)

**T1.** Mit einem statistisch ausgewogenen, sechs-seitigen Würfel wird $N$-Mal gewürfelt. Berechnen Sie jeweils den Erwartungswert und die Standardabweichung für

(a) die Summe $\Sigma$ der erwürfelten Augen;

(b) das Produkt $\Pi$ der erwürfelten Augen;

(c) den Logarithmus des Produkts der erwürfelten Augen, $\ln \Pi$.

Wie verhält sich dabei das Verhältnis von Erwartungswert zu Standardabweichung jeweils im Grenzwert großer $N$?

(d) Nehmen Sie nun $N = 4$, mit einer Summe der Augenzahlen von $\Sigma_1 = 11$, bzw. $\Sigma_2 = 19$ (Makrozustände). Berechnen Sie in beiden Fällen die Anzahl möglicher Mikrozustände (mögliche Kombinationen von Augenzahlen), die mit dem jeweils gegebenen Makrozustand kompatibel sind.

**Lösung**

(a) **EW:** $< x^1 >= \sum_i x_i p_i$
$p_i$ ist bei einem fairen Würfel $p_i = \frac{1}{6}$. Deshalb ist der Erwartungswert:

$$< x^1 >= \sum_{i=1}^{6} x_i p_i = \frac{7}{2} \tag{1}$$

Dies erfolgt N-Mal:

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} x_i\right] = \sum_{i=1}^{N} < x^1 >_i = N\frac{7}{2} \tag{2}$$

Die Standardabweichung ist:

$$\begin{aligned}\sqrt{< \bar{X}^2 >} &= (< X^2 > - < X^1 >^2)^{\frac{1}{2}} && (3)\\ &= \sqrt{N}\left(\frac{91}{6} - \frac{49}{4}\right)^{\frac{1}{2}} && (4)\\ &= \sqrt{N}\left(\frac{35}{12}\right)^{\frac{1}{2}} && (5)\end{aligned}$$

mit

$$< x^2 >= \sum_{i=1}^{6} x_i^2 p_i = \frac{91}{6}. \tag{6}$$

Das Verhältnis von Erwartungswert E zu Standardabweichung $\sigma$ ergibt sich zu:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{E}{\sigma} = \infty. \tag{7}$$

Damit ist $\sigma/E \to 0$ für große $N$, also ist der Erwartungswert für große $N$ eine sinnvolle Größe.

(b) Erwartungswert ist analog für ein Mal würfeln. Bei N Mal würfeln erhält man

$$E\left[\prod_{i=1}^{N} x_i\right] = \prod_{i=1}^{N} E[x_i] = \left(\frac{7}{2}\right)^N \tag{8}$$

und

$$\sqrt{< \bar{X}^2 >} = (< X^2 > - < X^1 >^2)^{\frac{1}{2}} \tag{9}$$

$$= \left(\left(\frac{91}{6}\right)^N - \left(\frac{7}{2}\right)^{2N}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

Das Verhältnis von Erwartungswert E zu Standardabweichung $\sigma$ ergibt sich zu:

$$\frac{E}{\sigma} = \left(\frac{7}{2}\right)^N \left(\left(\frac{91}{6}\right)^N - \left(\frac{7}{2}\right)^{2N}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{11}$$

Im limes grosser N erhält man:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{E}{\sigma} = \left[\left(\frac{26}{21}\right)^N - 1\right]^{\frac{1}{2}} = 0. \tag{12}$$

Damit ist $\sigma/E \to \infty$ für große $N$, also ist der Erwartungswert für große $N$ keine sinnvolle Größe.

(c) Der Erwartungswert ist

$$E\left[\ln \prod_{j=1}^{6} x_j\right] = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{6} \ln x_j \frac{1}{6}\right)_i \tag{13}$$

$$= \frac{N}{6} \ln 6! \tag{14}$$

und die Standardabweichung

$$\sqrt{< \bar{X}^2 >} \approx \sqrt{N} 0.61, \tag{15}$$

wobei der zweite Moment

$$< X^2 >= \frac{N}{6}(\ln 1^2 + \ln 2^2 + ... + \ln 6^2) \approx N 1.56 \tag{16}$$

ist. Das Verhältnis von Erwartungswert E zu Standardabweichung $\sigma$ ergibt sich zu:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{E}{\sigma} = \infty. \tag{17}$$

Damit ist $\sigma/E \to 0$ für große $N$, also ist der Erwartungswert für große $N$ durch den Logarithmus wieder eine sinnvolle Größe.

(d) Die Anzahl der Mikrozustände kann man durch abzählen aller Möglichkeiten berechnen. Für $\sum = 11$ ergibt sich die Anzahl der Mikrozustände zu 104. Für $\sum = 19$ ergibt sich die Anzahl der Mikrozustände zu 56.

**T2.** Eine diskrete Zufallsvariable ist nach der Binomialverteilung verteilt, d.h. das Ergebnis 1 tritt mit Wahrscheinlichkeit $p$ und das Ergebnis 0 mit Wahrscheinlichkeit $(1-p)$ ein. Die Wahrscheinlichkeit bei $n$-maliger Wiederholung des Experiments $k$-mal das Ergebnis 1 zu erhalten ist somit gegeben durch

$$p_{\mathrm{B}}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

(a) Berechnen Sie das erste Moment von $p_{\mathrm{B}}(k)$;

(b) betrachten Sie $p_{\mathrm{B}}(k)$ im Grenzwert $p \to 0$, $n \to \infty$, wobei $pn = \lambda = \text{const}$. Zeigen Sie, daß sich in diesem Grenzwert die diskrete Poisson-Verteilung

$$p_{\mathrm{P}}(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}$$

ergibt.

**Lösung**

(a) Das erste Moment (der Erwartungswert) $\mathsf{E}$ einer Verteilung errechnet sich als Summe über alle Versuchsausgänge, gewichtet mit ihrer jeweiligen Wahrscheinlichkeit. Bei uns gilt also:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(p_{\mathrm{B}}(k)) &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}
\end{aligned}$$

Diese Form sieht bereits verdächtig nach dem binomischen Lehrsatz aus, allerdings ergibt sich aufgrund des $(k-1)!$ noch kein Binomialkoeffizient. Wir möchten diesen also erzwingen:

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} p p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\
&= np \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\
&= np(p+1-p)^{n-1} \\
&= np,
\end{aligned}
$$

wobei wir den binomischen Lehrsatz

$$
(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k
$$

verwendet haben.

(b) Wir untersuchen nun den Grenzfall $n \to \infty$, $p \to 0$ und $np =: \lambda = \text{const}$. Diesen bilden wir durch geschicktes Erweitern:

$$
\begin{aligned}
p_{\mathrm{B}}(k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{np}{n}\right)^k \left(1 - \frac{np}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}^{k \text{ Faktoren}}}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{n}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}
\end{aligned}
$$

Weil, sofern er existiert, der Limes eines Produkts das Produkt der Limiten ist, und wegen

$$
\lim_{m \to \infty} \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m = \lim_{m \to \infty} \left(1 - \frac{x}{m}\right)^{m-\alpha} = e^{-x} \qquad \forall\, x, \alpha \in R
$$

können wir nun den Limes bilden:

$$
\lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to 0}} p_{\mathrm{B}}(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = p_{\mathrm{P}}(k)
$$

**T3.** Gegeben ist die diskrete Poisson-Verteilung

$$p_{\mathrm{P}}(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

(a) zeigen Sie explizit, daß die diskrete Poisson-Verteilung korrekt auf 1 normiert ist;
**Lösung.**

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{\mathrm{P}}(k) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{=\mathrm{e}^{\lambda}} \mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda} = 1.$$

(b) berechnen Sie das erste und zweite Moment, sowie die Varianz der diskreten Poisson-Verteilung.
**Lösung.**

$$\begin{aligned}
\langle k\rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_{\mathrm{P}}(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \\
&\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{\lambda^{\ell}}{\ell!} = \lambda \\
\langle k^2\rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot p_{\mathrm{P}}(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \\
&\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{\ell\lambda^{\ell}}{\ell!}}_{=\lambda\mathrm{e}^{\lambda}} + \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{\lambda^{\ell}}{\ell!}}_{=\mathrm{e}^{\lambda}}\right) = \lambda^2 + \lambda \\
\langle (k-\lambda)^2\rangle &= \sum_{k=0}^{\infty}(k-\lambda)^2 \cdot p_{\mathrm{P}}(k) = \sum_{k=0}^{\infty}(\underbrace{k^2}_{=\langle k^2\rangle} - \underbrace{2k\lambda}_{=2\lambda\langle k\rangle} + \underbrace{\lambda^2}_{=\lambda^2}) \cdot p_{\mathrm{P}}(k) = \\
&\lambda^2 + \lambda - 2\lambda^2 + \lambda^2 = \lambda \qquad (\text{allg.} \quad = \langle k^2\rangle - \langle k\rangle^2)
\end{aligned}$$

**T4.** Gegeben ist die Betaverteilung, $B_{\nu,\mu}(x)$, $x \in [0,1]$, mit

$$B_{\nu,\mu}(x) = \frac{\Gamma(\mu+\nu)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)} x^{\nu-1}(1-x)^{\mu-1}.$$

Zeigen Sie, daß die Betaverteilung für große $\mu$-Werte (und $x \cdot \mu$ endlich) in eine kontinuierliche Poisson-Verteilung übergeht, also

$$B_{\nu,\mu}(x) \sim \mu P_\nu(\mu x)$$

mit

$$P_\nu(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-1} \mathrm{e}^{-t} \qquad t \geq 0.$$

**Hinweis:** Beachten Sie, daß

$$\lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{y}{N}\right)^N = \mathrm{e}^{-y}$$

und verwenden Sie die Stirling Formeln (sh. Formelsammlung).

**Lösung**

Die beiden Stirlingformeln für große $\mu$ lauten:

$$\Gamma(\mu+\nu) \approx \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\mu}\mu^{\mu+\nu-\frac{1}{2}}$$
$$\Gamma(\mu) \approx \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\mu+1}(\mu-1)^{\mu-\frac{1}{2}}$$

Nun bilden wir den Limes der Betaverteilung für große $\mu$:

$$\lim_{\mu\to\infty} B_{\nu,\mu}(x) = \lim_{\mu\to\infty} \frac{\Gamma(\mu+\nu)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)} x^{\nu-1}(1-x)^{\mu-1} \approx$$
$$\lim_{\mu\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\mu}\mu^{\mu+\nu-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\mu+1}(\mu-1)^{\mu-\frac{1}{2}}\Gamma(\nu)} x^{\nu-1}(1-x)^{\mu-1} =$$

Wir kürzen und ersetzen $x$ durch $\frac{t}{\mu}$:

$$\lim_{\mu\to\infty} \frac{\mu^{\mu+\nu-\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}(\mu-1)^{\mu-\frac{1}{2}}\Gamma(\nu)} \left(\frac{t}{\mu}\right)^{\nu-1} \left(1-\frac{t}{\mu}\right)^{\mu-1} =$$

Nach dem Kürzen der $\mu$ und Umgruppieren folgt:

$$\lim_{\mu\to\infty} \mu \frac{1}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-1} \left(1-\frac{t}{\mu}\right)^{\mu-1} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}} \left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^{\mu-\frac{1}{2}} =$$
$$\lim_{\mu\to\infty} \mu \frac{1}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-1} \underbrace{\left(1-\frac{t}{\mu}\right)^{\mu-1}}_{\mathrm{e}^{-t}} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}} \underbrace{\frac{1}{\left(1-\frac{1}{\mu}\right)^{\mu-\frac{1}{2}}}}_{\mathrm{e}} =$$
$$\mu \frac{1}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-1} \mathrm{e}^{-t} = \mu P_\nu(t)$$

**Zu kreuzen: 1ab, 1c, 1d; 2a, 2b; 3a, 3b; 4**