
Gerhard Kahl & Florian Libisch
STATISTISCHE PHYSIK 1 (VU – 136.020)

8. Tutoriumstermin (17.6.2022)

T23 Betrachten Sie ein Gas ultrarelativistischer Fermionen, für das relativistische Effekte dominieren. Die Ein-Teilchen-Energien lauten dann $\epsilon(\mathbf{p}) \approx cp$.

- (a) Berechnen Sie die Zustandsdichte $D(\epsilon)$.
- (b) Verwenden Sie im folgenden die Sommerfeld-Entwicklung. Berechnen Sie [bis zur Ordnung $(T/T_F)^2$] die Temperaturabhängigkeit des chemischen Potentials μ bei konstanter Teilchenzahl.
- (c) Berechnen Sie [bis zur Ordnung $(T/T_F)^2$] die Temperaturabhängigkeit der Energie E .
- (d) Berechnen Sie [bis zur Ordnung $(T/T_F)^2$] die Temperaturabhängigkeit der Wärmekapazität c_V .

a.) Gegeben sei eine Energiedispersion $\epsilon(\mathbf{p}) \approx cp = c\hbar k$, wobei gilt $|\mathbf{k}| = k$. Durch die geforderte, alleinige Abhängigkeit der Dispersion vom Betrag werden wir im Folgenden sämtliche Rechnungen in Kugelkoordinaten durchführen.

Lösen der Schrödingergleichung führt uns auf diskrete k_n -Werte und somit auf eine begrenzte Anzahl an realisierbaren Zuständen – jeder dieser k_n -Werte kann bei periodischen Randbedingungen ein Volumen von $(2\pi/L)^3$ einnehmen. Für die k -abhängige Zustandsdichte erhalten wir somit:

$$D(k)dk = g \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 4\pi k^2 dk = \frac{V}{\pi^2} k^2 dk \quad (1)$$

Daraus können wir direkt die Energie-abhängige Zustandsdichte ableiten, wobei wir die Dispersionsrelation aus der Angabe verwenden können:

$$\boxed{D(\epsilon)d\epsilon = \frac{V}{\pi^2(c\hbar)^3} \epsilon^2 d\epsilon} \quad (2)$$

b.) Die mittlere Teilchenzahl $\langle N \rangle$ sei konstant und wird bei beliebiger Temperaturabhängigkeit berechnet über:

$$\langle N \rangle = \int_0^\infty d\epsilon D(\epsilon) f_{\text{FD}}(\epsilon; T) = \frac{V}{\pi^2(c\hbar)^3} \int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^2}{\exp\{\beta(\epsilon - \mu) + 1\}} \quad (3)$$

Für $T = 0$ ist dieses Integral leicht lösbar, da die Verteilungsfunktion als eine Stufenfunktion ausgedrückt werden kann und $\mu = \varepsilon_F$ gilt:

$$\langle N \rangle_{T=0} = \int_0^\infty d\varepsilon D(\varepsilon) f_{\text{FD}}(\varepsilon; 0) = \frac{V}{\pi^2 (c\hbar)^3} \int_0^{\varepsilon_F} d\varepsilon \varepsilon^2 = \frac{V}{3\pi^2 (c\hbar)^3} \varepsilon_F^3 \quad (4)$$

Im Allgemeinen sind Integrale der Form (3) bei Temperaturen $T > 0$ mit einer beliebigen internen Funktion $g(\varepsilon)$ lösbar durch die Sommerfeld-Entwicklung:

$$I[\varepsilon] \approx \int_0^\mu d\varepsilon g(\varepsilon) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 g'(\mu) + \mathcal{O}[(k_B T)^4] \quad (5)$$

Für $g(\varepsilon)$ verwenden wir die in (a) berechnete Zustandsdichte – setzt man (3) in (5) ein erhält man:

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &\approx \frac{V}{\pi^2 (c\hbar)^3} \left[\int_0^\mu d\varepsilon \varepsilon^2 + \frac{\pi^2}{3} (k_B T)^2 \mu + \mathcal{O}[(k_B T)^4] \right] = \\ &= \frac{V}{3\pi^2 (c\hbar)^3} \left[\mu^3 + (\pi k_B T)^2 \mu + \mathcal{O}[(k_B T)^4] \right] \stackrel{(4)}{=} \\ &= \frac{\langle N \rangle_{T=0}}{\varepsilon_F^3} \left[\mu^3 + (\pi k_B T)^2 \mu + \mathcal{O}[(k_B T)^4] \right] = \\ &= \frac{\langle N \rangle}{(k_B T_F)^3} \left[\mu^3 + (\pi k_B T)^2 \mu + \mathcal{O}[(k_B T)^4] \right] \end{aligned} \quad (6)$$

Die Teilchenzahl bleibt konstant, daher wird $\langle N \rangle = \langle N \rangle_{T=0}$ gelten!

- I.) Gesucht ist nun die Temperaturabhängigkeit des chemischen Potentials $\mu(T)$ bis zur zweiten Ordnung. Als einen ersten Ansatz für $\mu(T)$ wenden wir einen Potenzreihenansatz an:

$$\mu(T) = c_0 + c_1 k_B T + c_2 (k_B T)^2 + \mathcal{O}[(k_B T)^3] \quad (7)$$

Wir setzen nun (7) in (10) ein und suchen nach einem validen Satz an Koeffizienten $\{c_0, c_1, c_2\}$:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{(k_B T_F)^3} \left[\mu^3 + (\pi k_B T)^2 \mu + \mathcal{O}[(k_B T)^4] \right] = \\ &= \frac{1}{(k_B T_F)^3} \left[c_0^3 + 3c_0^2 c_1 (\pi k_B T) + [3c_0 c_1^2 + 3c_0^2 c_2 + c_0 \pi^2] (\pi k_B T)^2 + \mathcal{O}[(k_B T)^3] \right] \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt für die Koeffizienten die folgenden Werte:

$$c_0 = k_B T_F; \quad c_1 = 0; \quad c_2 = -\frac{\pi^2}{3k_B T_F}$$

Wir erhalten somit für das chemische Potential:

$$\boxed{\mu(T) \approx k_B T_F \left[1 - \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 \right]} \quad (8)$$

II.) Ein weiterer Weg das chemische Potential zu erhalten wäre (10) entsprechend umzuformen:

$$1 \approx \frac{1}{(k_B T_F)^3} [\mu^3 + (\pi k_B T)^2 \mu] = \frac{\mu^3}{(k_B T_F)^3} \left[1 + \left(\frac{\pi k_B T}{\mu} \right)^2 \mu \right] \approx \\ \approx \frac{\mu^3}{(k_B T_F)^3} \left[1 + \left(\frac{\pi k_B T}{k_B T_F} \right)^2 \mu \right]$$

Bei kleinen Temperaturen gilt näherungsweise $\mu \approx \varepsilon_F$. Wir können nun nach dem chemischen Potential umformen und die so entstehende dritte Wurzel entwickeln:

$$\mu \approx k_B T_F \left[1 + \left(\frac{\pi k_B T}{k_B T_F} \right)^2 \mu \right]^{-1/3} \approx k_B T_F \left[1 - \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B T}{k_B T_F} \right)^2 \mu \right]$$

c.) Für den Erwartungswert der Energie ε bilden wir das folgende Integral:

$$\langle E \rangle = \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon D(\varepsilon) f_{\text{FD}}(\varepsilon; T) = \frac{V}{\pi^2 (c\hbar)^3} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^3}{\exp\{\beta(\varepsilon - \mu) + 1\}} \quad (9)$$

Für die Auswertung dieses Integrals müssen wir wieder (5) heranziehen:

$$\langle E \rangle \approx \frac{V}{\pi^2 (c\hbar)^3} \left[\int_0^\mu d\varepsilon \varepsilon^3 + \frac{\pi^2}{2} (k_B T)^2 \mu^2 + \mathcal{O}[(k_B T)^4] \right] = \\ = \frac{V}{3\pi^2 (c\hbar)^3} \left[\frac{3\mu^4}{4} + \frac{3\pi^2 (k_B T)^2}{2} \mu^2 + \mathcal{O}[(k_B T)^4] \right] \stackrel{(4)}{=} \\ = \frac{\langle N \rangle_{T=0}}{\varepsilon_F^3} \left[\frac{3\mu^4}{4} + \frac{3\pi^2 (k_B T)^2}{2} \mu^2 + \mathcal{O}[(k_B T)^4] \right] \stackrel{(8)}{=} \\ = \frac{\langle N \rangle}{(k_B T_F)^3} \left[\frac{3(k_B T_F)^4}{4} \left\{ 1 - \frac{4\pi^2}{3} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 \right\} + \frac{3\pi^2 (k_B T)^2}{2} (k_B T_F)^2 + \mathcal{O}[(k_B T)^3] \right] = \\ = \langle N \rangle k_B T_F \left[\frac{3}{4} \left\{ 1 - \frac{4\pi^2}{3} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 \right\} + \frac{3\pi^2}{2} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 + \mathcal{O}[(k_B T)^3] \right] = \\ = \langle N \rangle k_B T_F \left[\frac{3}{4} + \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 + \mathcal{O}[(k_B T)^3] \right] \quad (10)$$

Es wurden jeweils nur Terme bis zum Quadrat der Temperatur explizit angeschrieben. Wir erhalten:

$$\boxed{\langle E \rangle \approx \langle N \rangle k_B T_F \left[\frac{3}{4} + \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 \right]} \quad (11)$$

d.) Die Berechnung der Wärmekapazität $c_V = \partial E / \partial T|_{V,N}$ erfolgt wie üblich über eine einfache Differentiation nach der Temperatur T :

$$\boxed{c_V \approx \langle N \rangle k_B \pi^2 \frac{T}{T_F}} \quad (12)$$

T24. Betrachten Sie ein ideales Fermigas in einem kugelförmigen Behälter mit Radius R .

- (a) Berechnen Sie den Druck des Fermigases im Limes kleiner T . Drücken Sie Ihr Ergebnis mittels des Erwartungswertes der Teilchenzahl $\langle N \rangle_g$ aus. Welches Prinzip liegt dem Druck des Fermigases zugrunde?
- (b) Berechnen Sie für gegebenes $\langle N \rangle_g$ die mittlere kinetische Energie des Fermigases als Funktion des Behälterradius R .
- (c) Berechnen Sie klassisch die Gravitationsenergie eines Sternes konstanter Dichte als Funktion seines Radius unter der Annahme, dass der Stern kugelförmig (Radius R) ist.
- (d) In einem Neutronenstern werden durch die hohe Gravitation die Elektronen in die Atomkerne gedrückt, bis eine Kugel aus hochkomprimierten Neutronen entsteht. Schätzen Sie mit Hilfe Ihrer obigen Resultate den Radius eines Neutronensterns als Funktion seiner Masse ab. Was ergibt sich in etwa für eine Sonnenmasse?

Lösung:

- (a) Aus der VO wissen wir, dass für kleine Temperaturen gilt:

$$\lim_{T \rightarrow 0} f_{FD}(\epsilon) = \Theta(E_F - \epsilon) \quad (13)$$

Die Zustandsdichte für ein 3 Dim. Fermigas entnehmen wir auch der VO:

$$D(\epsilon) = \frac{gV}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\epsilon} \quad (14)$$

Wir berechnen jetzt den Erwartungswert der Teilchenzahl im Limes kleiner Temperaturen:

$$\langle N(T=0) \rangle = \int_0^\infty d\epsilon D(\epsilon) f_{FD}(\epsilon, T=0) \quad (15)$$

$$= \int_0^{E_F} d\epsilon D(\epsilon) \quad (16)$$

$$= \frac{gV}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{2}{3} E_F^{3/2} = \langle N_0 \rangle \quad (17)$$

Jetzt können wir den Druck berechnen. Es gilt nämlich:

$$PV = \int_0^\infty d\epsilon \hat{D}(\epsilon) f_{FD}(\epsilon), \quad (18)$$

wobei

$$\hat{D}(\epsilon) = \int_0^\epsilon d\epsilon' D(\epsilon') = \frac{2}{3} \frac{gV}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \epsilon^{3/2}. \quad (19)$$

Daraus folgt dann:

$$P = \frac{4gV}{15V4\pi^2} V \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} E_F^{5/2} = \langle N_0 \rangle E_F \frac{2}{5V}. \quad (20)$$

Dieser Druck ist der sogenannte Ertartungsdruck und entsteht weil im $k=0$ Zustand nur g Fermionen sitzen können.

- (b) Die mittlere kinetische Energie E_k des Fermigas ist hier gleich der inneren Energie des Behälters E .

$$E = \int_0^\infty d\epsilon \epsilon D(\epsilon) f_{FD}(\epsilon) \quad (21)$$

$$= \int_0^\infty d\epsilon \epsilon \frac{gV}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\epsilon} \Theta(E_F - \epsilon) \quad (22)$$

$$= \int_0^{E_F} \frac{gV}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \epsilon^{3/2} d\epsilon \quad (23)$$

$$= \frac{gV}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{2}{5} E_F^{5/2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \quad (24)$$

$$= \frac{3\langle N_0 \rangle E_F}{5}. \quad (25)$$

Wir benutzen Gl. (17) um E_F auszudrücken:

$$E_F = \langle N_0 \rangle^{2/3} \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} \left(\frac{4\pi^2}{gV} \right)^{2/3} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right). \quad (26)$$

Jetzt setzen wir Gl. (26) und $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ in Gl. (25) ein und erhalten:

$$E = \frac{3}{5} \langle N_0 \rangle^{5/3} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2\pi}{g} \right)^{2/3} \left(\frac{3}{2} \right)^{4/3} \frac{1}{R^2} \quad (27)$$

- (c) Um einer Kugel mit Radius R und Dichte ρ eine zusätzliche Schicht Materie aufzutragen, muss man Arbeit leisten. Diese Arbeit ist gleich der Bindungsenergie des Gravitationspotentials dV_p

$$dV_p = -\frac{G}{r} dm_s m, \quad (28)$$

mit $m = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho$ die Masse des Sterns und $dm_s = 4\pi r^2 dr \rho$ die Masse der Aufgesetzten Schale.

Es folgt daraus durch Integration:

$$V_p = -\frac{16}{15} G \rho^2 R^5 \pi^2 = -\frac{3}{5} \frac{M^2 G}{R}, \quad (29)$$

mit $M = \frac{4\pi R^3 \rho}{3}$ die Gesamtmasse.

(d) **Neutronenstern:**

Als erstes schreiben wir V_p um als Funktion vom Volumen V . Dies ergibt:

$$V_p = -\frac{16}{15}\pi^2 \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{-2} (NM_N)^2 G V^{-1/3} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}, \quad (30)$$

wobei wir benutzt haben, dass $\rho = \frac{NM_N}{V}$. Jetzt können wir den nach innen wirkenden Druck p_{Grav} berechnen:

$$p_{\text{Grav}} = -\frac{\partial V_p}{\partial V} = \frac{3}{5}G(NM_N)^2 \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} \left(-\frac{1}{3}\right) V^{-4/3}. \quad (31)$$

Der Fermidruck hingegen wirkt nach außen. Wir wissen:

$$p_F = E_F \langle N_0 \rangle \frac{2}{5V} = E_F \frac{2}{5}n, \quad (32)$$

mit $n = \frac{N}{V}$ ($N = \langle N_0 \rangle$). Wir berechnen N und drücken dann E_F aus:

$$N = gE_F^{3/2} \frac{2}{3} \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2M_N}{\hbar^2}\right)^{3/2}. \quad (33)$$

Daraus folgt:

$$E_F = (3n\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2M_N}, \quad (34)$$

wobei wir $g=2$ eingesetzt haben.

Die Summe der Drücke muss im Gleichgewicht 0 ergeben, d.h.

$$p_{\text{Grav}} + p_F = 0. \quad (35)$$

Wir lösen jetzt diese Gleichung und erhalten den Radius des Neutronensterns:

$$(3n\pi^2)^{2/3} \frac{n\hbar^2}{M_N} = \frac{1}{5}G(NM_N)^2 \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} V^{-4/3}. \quad (36)$$

Jetzt setzen wir $V = \frac{4\pi R^3}{3}$ und erhalten:

$$R = \frac{\hbar^2}{GM_N^{8/3}} \frac{1}{(NM_N)^{1/3}} \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3} \quad (37)$$

wobei $(NM_N)^{1/3} = M^{1/3}$.

Für die Masse unserer Sonne ($M = 1.98 \cdot 10^{30}$) würde z.B. gelten:

$$R \approx 12.3 \text{ km} \quad (38)$$

T25 Die innerhalb eines Metalls quasifreien Leitungselektronen haben dort eine geringere potentielle Energie als im Außenraum, können dieses deshalb bei $T = 0$ nicht verlassen. Der energetische Abstand W_a zwischen dem Außenraumpotential V_0 und der Fermi-Energie E_F im inneren des Metalls wird Austrittsarbeit genannt. Bei endlichen Temperaturen werden einige Elektronen, die Zustände im hochenergetischen Ausläufer der Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion besetzen, das Metall verlassen können. Das Metall befindet sich in einem geschlossenen Behälter. Der nicht ausgefüllte Teil sei bei $T = 0$ Vakuum.

- (a) Geben Sie die Zustandsdichten im Metall und im Außenraum an. Wie lauten im Außenraum die mittleren Besetzungszahlen $n_k^{(a)}$.
- (b) Bestimmen Sie die Elektronendichte außerhalb des Metalls bei der Temperatur T ("Dampfdruck" der Metallelektronen). Hinweis: Die Austrittsarbeit ist typischerweise ein paar eV, also $\beta(V_0 - \mu) \gg 1$ bei Raumtemperatur.
- (c) Nehmen Sie an dass sich das Metall im Halbraum $z < 0$ befindet. Leiten Sie für die Emmissionsstromdichte

$$j_z = \frac{-e}{V} \sum \frac{\hbar k}{m} \langle \hat{n}_k^{(a)} \rangle \quad (39)$$

die Richardson-Formel ab,

$$j_z \approx \frac{-4\pi m e}{h^3} (k_B T)^2 e^{-\beta(V_0 - \mu)} \quad (40)$$

a) Zuerst betrachten wird die Zustandsdichte im Metall, wir setzen das Potential im Metall auf den Wert 0, weiters gehen wir davon aus dass die Elektronen als freies Elektronengas in einer Box beschrieben werden kann. Wenn ein Elektron die Energie V_0 erreicht kann es in den Außenraum und ist nicht mehr im Metall. Dies führt uns zu folgendem 1-Teilchen Hamiltonian:

$$H_M = \frac{(\hbar p_M)^2}{2m}, \epsilon_M = \frac{(\hbar k_{M,i})^2}{2m} \leq V_0, k_{M,i} = \frac{2\pi}{L_{M,i}} n_i$$

$$n_i \in \{-\infty, \dots, \infty\}, i \in x, y, z$$

Daraus folgt das im Metall die Zustandsdichte wie bei einem idealen Fermigas aussieht,

$$D_M(\epsilon) = \frac{L_M^3}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\epsilon}$$

Für den Fall dass die Energie eines Elektrons größer als V_0 ist kann sich das Teilchen auch im Außenraum befinden. Es gilt folgender Hamiltonian für den Außenraum:

$$H_a = \frac{(\hbar p_a)^2}{2m} + V_0, \epsilon_a = \frac{(\hbar k_{a,i})^2}{2m} + V_0, k_{a,i} = \frac{2\pi}{L_{a,i}} n_i$$

$$n_i \in \{-\infty, \dots, \infty\}, i \in x, y, z$$

Die Zustandsdichte im Außenraum berechnet sich dann wie folgt:

$$\begin{aligned}
D_a(\epsilon) &= \sum_{\vec{n}} \delta(\epsilon - \epsilon_{\vec{n}}) \Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z \\
&= \frac{L_a^3}{(2\pi)^3} 2 \int \delta(\epsilon - \epsilon_{\vec{k}}) d^3k \\
&= \frac{L_a^3}{(2\pi)^3} 8\pi \int k^2 \delta(\epsilon - \epsilon_k) dk \\
&= \frac{L_a^3}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{V_0}^{\infty} \sqrt{\epsilon_k - V_0} \delta(\epsilon - \epsilon_k) d\epsilon_k \\
&= \begin{cases} \frac{L_a^3}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\epsilon - V_0} & \epsilon \geq V_0 \\ 0 & \epsilon < V_0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Wobei von Zeile 3 auf 4 folgende Relationen benutzt wurden:

$$k = \sqrt{\frac{2m(\epsilon_{a,k} - V_0)}{\hbar^2}}, dk = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2(\epsilon_k - V_0)}} d\epsilon$$

Die mittlere Besetzungszahl im Außenraum ergibt sich dann zu:

$$\langle n_{a,k} \rangle = (e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} + 1)^{-1}$$

b)

$$\begin{aligned}
N_a &= \int_0^{\infty} D_a(\epsilon) f_{FE} d\epsilon \\
&= \frac{L_a^3}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{V_0}^{\infty} \frac{\sqrt{\epsilon - V_0}}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} d\epsilon \\
&= \frac{L_a^3}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{V_0}^{\infty} \frac{\sqrt{\epsilon - V_0}}{e^{\beta(\epsilon - V_0 + V_0 - \mu)} + 1} d\epsilon \\
&= \frac{L_a^3}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{u}}{e^{\beta(u + V_0 - \mu)} + 1} du \\
&\approx \frac{L_a^3}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta(V_0 - \mu)} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{u}}{e^{\beta u}} du \\
&\approx \frac{L_a^3}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta(V_0 - \mu)} \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta^{\frac{3}{2}}} \\
&\approx \frac{L_a^3}{4} \left(\frac{2m}{\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{(V_0 - \mu)}{k_b T}} (k_b T)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

Hier wurde mit $u = \epsilon - V_0$ substituiert. Von Zeile 4 auf 5 wurde verwendet dass $\beta(V_0 - \mu) \gg 1$ für Raumtemperatur. Da W_a im Bereich von einigen eV liegt und dies äquivalent ist zu einer Temperatur von einigen 10000 K. ist für unseren Temperaturbereich diese Näherung sinnvoll da bei so hohen Temperaturen das Metall auch schon längst geschmolzen wäre.

c) Emmisionsstromdichte: $k > 0$ (nur die Elektronen, die von der Oberfläche weglaufen)

$$\begin{aligned}
 j_z &= -\frac{e}{V} \sum_{k_z > 0} \frac{\hbar k_z}{m} \langle \hat{n}_k^{(a)} \rangle \\
 &= -\frac{e}{V} \frac{\hbar}{m} \frac{V}{8\pi^3} \int_0^\infty dk_z \int dk_x \int dk_y k_z f_{FD} \\
 &= -\frac{e\hbar}{Vm} \frac{V}{8\pi^3} \int_0^\infty dk_z \int dk_x \int dk_y k_z f_{FD}
 \end{aligned}$$

Wir können nicht gleich $D(\varepsilon)$ einsetzen, da wir ja nur über die $k_z > 0$ integrieren wollen. In Kugelkoordinaten gibt $k_z = k \cos(\theta)$,

$$j_z = -\frac{e\hbar}{Vm} \frac{V}{8\pi^3} \int_0^\infty k^2 dk \int d\phi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta k \cos \theta f_{FD}$$

Das Winkelintegral gibt π statt wie sonst 4π , daher ein zusätzlicher Faktor $1/4$. Jetzt können wir endlich $D(\varepsilon)$ einsetzen (mit $k = \sqrt{2m(\varepsilon - V_0)/\hbar^2}$)

$$\begin{aligned}
 j_z &= -\frac{e\hbar}{Vm} \frac{1}{4} \int_0^\infty d\varepsilon D(\varepsilon) \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(\varepsilon - V_0)} f_{FD} \\
 &\approx -\frac{em}{2\pi^3 \hbar^3} \int_{V_0}^\infty \sqrt{\varepsilon - V_0} \frac{\sqrt{\varepsilon - V_0}}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)}} du \\
 &\approx -\frac{em}{2\pi^3 \hbar^3} e^{-\beta(V_0 - \mu)} \int_0^\infty \frac{u}{e^{\beta u}} du \\
 &\approx -\frac{4em\pi}{(2\pi\hbar)^3} e^{-\beta(V_0 - \mu)} (k_b T)^2 \\
 &\approx -\frac{4\pi em}{h^3} e^{-\beta(V_0 - \mu)} (k_b T)^2
 \end{aligned}$$

Hier wurde wieder die gleiche Substitution und Näherung wie im Abschnitt b benützt.

Zu kreuzen: 23ab, 23cd; 24a, 24b, 24cd; 25a, 25b, 25c