Statistische Physik I — Übungsblatt 1

(Tutorium: Fr. 24.03.2023)

1. **Vollständige Differentiale und integrierender Faktor**:

(a) Welcher der folgenden Ausdrücke ist tatsächlich ein vollständiges Differential (Begründung)?

$$\begin{aligned} \text{(i)} \qquad dF_1 &= (\tfrac{1}{2}x + y^2)dx + (\tfrac{1}{2}y + x^2)dy \\ \text{(ii)} \qquad dF_2 &= (\tfrac{4}{5}x^{3/5}y^{1/5} + 3y)dx + (3x + \tfrac{1}{10}x^{8/5}y^{-4/5})dy \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Stammfunktion (bis auf eine Konstante) für die Ausdrücke, die ein vollständiges Differential darstellen.

(b) Stellen Sie fest, ob

$$dF = (xy^2 + xy\,e^x)dx + (2x^2y + xe^x)dy$$

ein vollständiges Differential bildet. Wenn ja, dann bestimmmen Sie die Stammfunktion (bis auf eine Konstante). Wenn nein, dann bestimmen Sie einen integrierenden Faktor, d.h., eine (nicht eindeutig bestimmte) Funktion $\gamma(x, y)$ sodass $dG = \gamma(x, y)dF$ ein vollständiges Differential bildet.

(c) Für Gase ist die Energie $E(T, V)$ eine Zustandsfunktion und $dE(T, V)$ bildet daher ein vollständiges Differential in den Variablen T und V. Bei fixer Teilchenzahl gilt für die mechanische Arbeit $\delta W = -p(T, V)\,dV$. Verwenden Sie den 1. Hauptsatz, um zu zeigen, dass $\delta Q(T, V)$ im Allgemeinen kein vollständiges Differential ist.

(d) Zeigen Sie, ausgehend von (c), dass $dY = T^{-1}\delta Q$ ein vollständiges Differential für *ideale Gase* ist. Benützen Sie für diese Aufgabe explizit die thermische und kalorische Zustandsgleichung für ideale Gase. Welcher physikalischen Größe entspricht Y?

2. **Thermodynamischer Kreisprozess**:

Betrachten Sie einen thermodynamischen Kreisprozess, bei dem ein ideales monoatomares Gas, ausgehend von einem Gleichgewichtszustand mit Druck p_1 und Volumen V_1, folgende Schritte quasistatisch und reversibel mit konstanter Teilchenzahl durchläuft:

(i) Isobare Expansion

(ii) Adiabatische[1] Expansion

(iii) Isochore Dekompression

(iv) Adiabatische Kompression

[1] D.h. $pV^\gamma = konst.$, mit $\gamma = \frac{5}{3}$.

(a) Skizzieren Sie den Kreisprozess im p-V und T-S Diagramm.

(b) Berechnen Sie für jeden der Schritte j= (i), (ii), (iii), (iv) die vom System geleistete Arbeit ΔW_j und die vom System aufgenommene Wärme ΔQ_j als Funktionen der jeweiligen Drücke p_j und Volumina V_j. Geben Sie jeweils explizit die Vorzeichen von ΔW_j und ΔQ_j an.

(c) Geben Sie den Wirkungsgrad η einer auf diesem Kreisprozess beruhenden Wärmemaschine als Funktion der ΔW_j und ΔQ_j an. Eine explizite Darstellung des Wirkungsgrades als Funktion der p_j und V_j ist nicht nötig.

(d) Geben Sie die Variationen ΔS und ΔE der Entropie und der inneren Energie des Systems, sowie des Universums (d.h., System + Umgebung) an, die vom Kreisprozess verursacht wurden. Wie würden sich diese Werte ändern, wenn der entsprechende Kreisprozess durch nicht reversible Transformationen realisiert werden würde?

3. N **nicht-wechselwirkende Ising Spins**:

Betrachten Sie ein System von N nicht-wechselwirkenden Spins in einem konstanten Magnetfeld $\vec{B} = B\,\vec{e}_z$ in z-Richtung. Die Energien für Spin parallel (↑) bzw. antiparallel (↓) zum Magnetfeld lauten $E_+ = +\hbar\omega$, bzw. $E_- = -\hbar\omega$, wobei $\hbar\omega = \mu_B B$ ist (mit $\mu_B \simeq 5.8 \cdot 10^{-5}$ eV T^{-1}). Sei n die Zahl der Spins im Zustand ↑ und, in thermischen Gleichgewicht, sei q die Wahrscheinlichkeit einen Spin im Zustand ↑ vorzufinden.

(a) Geben Sie den expliziten Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit $W_N(n)$ an, n Spins im Zustand ↑ zu finden, und argumentieren Sie (konzis!) Ihre Antwort.

(b) Zeigen Sie, dass die sogenannte "erzeugende Funktion" von $W_N(n)$, definiert als $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} W_N(n)\,x^n$, gleich $(1+qx-q)^N$ ist.

(c) Bestimmen Sie die mittlere Anzahl $\langle n\rangle$ von Spins parallel (↑) zum Magnetfeld so wie die entsprechende mittlere quadratische Abweichung $\sigma^2 = \langle (n-\langle n\rangle)^2\rangle = \langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2$. Verwenden Sie bei Bedarf die erzeugende Funktion $G(x)$ aus (b).

(d) Zeigen Sie mit Hilfe der Stirling Formel, dass sich für fixes $\frac{\langle n\rangle}{N}$ der Grenzwert von $W_N(n)$ für große N im Wesentlichen auf eine Gauß-Verteilung reduziert, d.h., $W_N(n) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} W_N(\langle n\rangle)\,\mathrm{e}^{\frac{-(n-\langle n\rangle)^2}{2\sigma^2}}$.

(e) Zeigen Sie nun, dass $W_N(n) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \langle n\rangle^n\,\frac{\mathrm{e}^{-\langle n\rangle}}{n!}$ (Poisson-Verteilung), falls stattdessen $\langle n\rangle$ fixiert wird.

(f) Schäzten Sie ab, für welche Temperaturen die Gauß-, bzw. die Poisson-Verteilung adäquate Nährungen für $W_N(n)$ darstellen, unter der physikalische Annahme, dass $\frac{q}{1-q} = \mathrm{e}^{-\beta(E_+-E_-)}$ ist, mit der inversen Temperatur $\beta = (k_BT)^{-1}$. Sie dürfen hier annehmen, dass das Magnetfeld sehr stark ist ($B \sim 30$ Tesla).

Kreuzerl für: *1(a) + (b); 1(c) + (d); 2(a) +(b); 2(c)+ (d); 3(a) +(b)+ (c); 3(d) +(e) +(f)*