Statistische Physik I — Übungsblatt 3

(Tutorium: Fr. 5.5.2023)

7. **Klassisches Gas im Gravitationsfeld**:

Betrachten Sie ein klassisches Gas von N nicht-wechselwirkenden Teilchen der Masse m im Schwerefeld. Das Gas befindet sich in einem nach oben hin offenen Behälter mit Querschnittsfläche A. Die Hamiltonfunktion für dieses System lautet

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} + m\,g\,z_i \right).$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeinen Ausdrücke für die kanonische Phasenraumdichte ρ_{K} und für die kanonische Zustandssumme $Z_{\mathrm{K}}(T,N)$.

(b) Berechnen Sie $Z_{\mathrm{K}}(T,N)$ und die freie Energie $F(T,N)$ für dieses System.

(c) Verwenden Sie den Ausdruck für $F(T,N)$ aus (b) um die Wärmekapazität C_V für das Gas im Schwerefeld zu berechnen.

(d) Berechnen Sie die innere Energie $U(T,N)$ und bestimmen Sie alternativ zu (c) die Wärmekapazität C_V.

8. **Großkanonisches Ensemble**:

(a) Zeigen Sie explizit, dass für das großkanonische Ensemble mit großkanonischem Potential $J = -k_{\mathrm{B}}T\ln(Z_{\mathrm{G}})$ die allgemeine Relation

$$p = -\left(\frac{\partial J}{\partial V}\right)_{T,\mu}$$

aus der Definition des Druckes $p := -\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial V} \rangle$ folgt, wobei $\mathcal{H}$ die Hamiltonfunktion ist.

(b) Zeigen Sie nun, dass für das großkanonische Ensemble mit großkanonischem Potential $J = -k_{\mathrm{B}}T\ln(Z_{\mathrm{G}})$ die allgemeine Relation

$$S = -\left(\frac{\partial J}{\partial T}\right)_{V,\mu}$$

aus der Definition der Entropie $S := -k_{\mathrm{B}}\langle \ln(\rho_{\mathrm{G}}) \rangle$ folgt.

(c) Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme Z_{G} und daraus $J(T,V,\mu)$ und $N(T,V,\mu)$ für ein ideales Gas (in einem 3D Behälter mit Volumen V) und verifizieren Sie die thermische Zustandsgleichung. Bestimmen Sie weiters $\mu(T,V,N)$ und skizzieren Sie $\mu(T)$ als Funktion der Temperatur.
Hinweis: Verwenden Sie $\lambda_T = \sqrt{h^2/(2\pi m k_{\mathrm{B}}T)}$ zur Vereinfachung der Resultate.

(d) Drücken Sie die Varianz der Teilchenzahl $(\Delta N)^2 = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2$ in einem großkanonischen Ensemble durch die 2.Ableitung von $\ln(Z_{\mathrm{G}})$ aus und zeigen Sie, dass für ein ideales Gas gilt:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

9. **Alternativer Ausdruck für die isothermische Kompressibilität**:

Aus der Vorlesung vom 14.3.2023 ist folgende Definition für die isothermische Kompressibilität κ_T (d.h. für die Responsefunktion, welche die relative Volumsänderung eines Systems bei Druckänderung beschreibt) bekannt:

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T,N}.$$

Zeigen Sie, dass sich diese Responsefunktion durch den alternativen Ausdruck (welcher etwa für die Berechnung elektronischer Eigenschaften in der Festkörperphysik nützlich ist)

$$\kappa_T = \frac{1}{n^2}\left(\frac{\partial n}{\partial \mu}\right)_T$$

darstellen lässt, wobei $n = \frac{N}{V}$.

(a) Betrachten Sie den Druck p und das chemische Potential μ als Funktionen der Variablen T, V und N, d.h. $p(T, V, N)$ und $\mu(T, V, N)$. Wie ändern sich die Werte der Variablen T, V, N und die Werte der Funktionen p und μ, wenn man das System um einen Faktor λ vergrößert? Geben Sie die allgemeinen Relationen an, die den Druck, bzw. das chemische Potential des ursprünglichen Systems ($\lambda = 1$) und des vegrösserten System miteinander in Beziehung setzen. Beweisen Sie durch eine Ableitung dieser zwei Relationen nach dem Parameter λ, dass die Gleichung

$$V\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{T,N} + N\left(\frac{\partial p}{\partial N}\right)_{T,V} = 0,$$

für den Druck gilt, und auch die entsprechende Gleichung für das chemische Potential gilt.

(b) Beweisen Sie explizit die folgende thermodynamische Relation:

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial N}\right)_{T,V} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial V}\right)_{T,N}.$$

Leiten Sie nun mit Hilfe dieser Relation und der zwei aus (a) erhaltenen Gleichungen die thermodynamische Identität der zwei Definitionen der isothermischen Kompressibilität her:

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T,N} \equiv \frac{1}{n^2}\left(\frac{\partial n}{\partial \mu}\right)_T.$$

Kreuzerl für: 7(a) + (b); 7(c) + (d); 8(a) +(b); 8(c)+ (d); 9(a) ; 9(b)