

## Statistische Physik I — Übungsblatt 5

(Tutorium: Fr. 2.6.2023)

### 13. Identische Teilchen:

Sei  $\hat{H}^{(1)}$  ein Einteilchen-Hamiltonoperator im Ortsraum. Die (im Ortsraum nicht entartete) Eigenzustände von  $\hat{H}^{(1)}$  sind folgende:  $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle$  mit entsprechenden Eigenenergien  $\epsilon_0 = 0, \epsilon_1 = \hbar\omega_0$ , und  $\epsilon_2 = 2\hbar\omega_0$ , mit  $\omega_0 > 0$ .

- (a) Betrachte ein System mit zwei unabhängigen Elektronen (Spin  $\frac{1}{2}$ ) mit Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \hat{H}_1^{(1)} + \hat{H}_2^{(1)} = \hat{H}^{(1)} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \hat{H}^{(1)}.$$

Geben Sie die expliziten Ausdrücke der Eigenzustände (als Produkte der Eigenzustände von  $\hat{H}_1^{(1)}$  und  $\hat{H}_2^{(1)}$  inklusive des entsprechenden Spinanteils, mit der korrekten (anti-)Symmetrisierung) und Eigenenergien von  $\hat{H}$  für den Grundzustand und die ersten zwei angeregten Zustände dieses Systems an, und bestimmen Sie auch die korrespondierenden Entartungen. Wiederholen Sie die gleiche Rechnung für ein System mit zwei unabhängigen Bosonen mit Spin 0.

- (b) Wie ändern sich die Ergebnisse für den Grundzustand und den 1. angeregten Zustand des Systems für zwei Elektronen aus (a), wenn auch der Spin-Spin-Wechselwirkungsterm  $V = -J\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$  im Hamiltonoperator  $\hat{H}$  berücksichtigt wird?
- (c) Betrachten Sie nun den entsprechenden Hamilton-Operator für den Fall von drei Bosonen mit Spin 0:  $\hat{H} = \hat{H}_1^{(1)} + \hat{H}_2^{(1)} + \hat{H}_3^{(1)}$ . Geben Sie die Energien und die entsprechenden Zustände für den Grundzustand und den 1. angeregten Zustand.

### 14. Fermi-Gas in verschiedenen Dimensionen:

Betrachten Sie ein nicht-wechselwirkendes und nicht-relativistisches Fermi-Gas in einer  $d$ -dimensionalen Box mit Volumen  $V = L^d$  und Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^d \frac{\hat{p}_{\alpha,i}^2}{2m}.$$

- (a) Berechnen Sie explizit die Zustandsdichte  $D(E)$  des Gases als Funktion der Dimension  $d$  und vergleichen Sie das Resultat mit dem in der Vorlesung hergeleiteten Ausdruck für  $d = 3$ . Skizzieren den Verlauf von  $D(E)$  für kleine Energien in  $d = 1, 2, 3, 4$ . Gibt es qualitative Unterschiede?

- (b) Bestimmen Sie die Fermi-Energie  $E_F$  des Systems als Funktion von  $N$  und  $d$  und berechnen Sie danach die innere Energie des nicht-relativistischen Fermi Systems in  $d$  Dimensionen bei der Temperatur  $T = 0$ .
- (c) Betrachten Sie nun den Fall eines ultrarelativistischen Fermi-Gases in  $d$  Dimensionen mit Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N c \sqrt{\sum_{\alpha=1}^d \hat{p}_{\alpha,i}^2}.$$

Berechnen Sie auch für dieses System die Zustandsdichte  $D(E)$  und die Fermi-Energie  $E_F$  als Funktion von  $N$  und  $d$ . Berechnen Sie auch die innere Energie des ultrarelativistischen Fermi-Gases in  $d$  Dimensionen bei  $T = 0$ .

## 15. Fermi-Gase II:

Betrachten Sie zwei nicht-wechselwirkende Fermi-Gase mit Spin  $S = \frac{1}{2}$  und Zustandsdichten (i)  $D(E) = K/\sqrt{E}$  bzw. (ii)  $D(E) = \tilde{K}E$ .

- (a) Welche Einheiten haben die Vorfaktoren (i)  $K$  und (ii)  $\tilde{K}$ ? Welche Systeme (räumliche Dimension, Fallenpotential) beschreiben diese zwei Zustandsdichten?
- (b) Bestimmen Sie die Fermienergie  $E_F$  der beiden Fermigase für eine gegebene Teilchenzahl  $N$ . In welchem Fall wächst  $E_F$  schneller mit  $N$ ? Begründen Sie Ihre Antwort intuitiv.
- (c) Berechnen Sie das chemische Potential  $\mu(T)$  für den Fall (i) bis zur Ordnung  $T^2$  mithilfe der Sommerfeldentwicklung.

Kreuzerl für: 13(a); 13(b+c); 14(a); 14(b+c); 15(a+b); 15(c)