Statistische Physik I — Übungsblatt 6

(Tutorium: Fr. 16.6.2023)

16. **Fermi-Gase III**:

Betrachten Sie ein 1-dimensionales Fermi-Gas mit Spin $S = \frac{1}{2}$ und Einteilchenhamilton-operator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \Lambda \hat{x}^4.$$

Für dieses quartische Potential können die Einteilchenenergien durch

$$E_n \simeq E_0 n^{4/3}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

genähert werden, wobei im thermodynamischen Grenzfall gilt $E_0 \to 0$.

(a) Schreiben Sie die Zustandsdichte für dieses System als $D(E) = KE^{\gamma-1}$ und bestimmen Sie die Parameter K und γ.

(b) Bestimmen Sie die Fermienergie E_F für gegebene Teilchenzahl N.

(c) Bestimmen Sie die innere Energie U dieses Fermigases und drücken Sie das Resultat mit Hilfe der Fermifunktionen $f_\alpha(z)$ aus.

(d) Berechnen Sie $U(T)$ mit Hilfe der Sommerfeldentwicklung bis inklusive der Ordnung T^2. Setzen Sie dazu

$$\mu(T) \simeq E_\mathrm{F} \left[1 - \frac{\pi^2}{6}(\gamma - 1) \left(\frac{k_\mathrm{B}\, T}{E_\mathrm{F}} \right)^2 + \mathcal{O}(T^4) \right]$$

als bekannt voraus.

17. **Ideales Bose-Gas**:

Betrachten Sie ein Gas aus nichtwechselwirkenden Bosonen mit Spin $S = 0$ und mit einer allgemeinen Zustandsdichte der Form

$$D(E) = KE^{\gamma-1}\,.$$

(a) Leiten Sie mit Hilfe der oben gegebenen Zustandsdichte einen allgemeinen Ausdruck für die mittlere Teilchenzahl N und die mittlere innere Energie U des Bose-Gases ab. Drücken Sie das Ergebnis mit Hilfe der Bose-Integrale $g_\alpha(z)$ aus.

(b) Für welche der folgenden Exponenten $\gamma = \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$ gibt es eine Bose-Einstein Kondensation? Begründen Sie Ihre Antwort und berechnen Sie die Kondensationstemperatur T_c für einen γ-Wert Ihrer Wahl.

(c) Zeigen Sie, dass im thermodynamischen Limes die Relation $J = -U/\gamma$ zwischen der inneren Energie U und dem großkanonischen Potential J gilt.

18. **Kondensation im Schwerefeld**:

Ein Gas aus N Bosonen mit Masse m und Spin $S = 0$ sei in einem offenen Behälter mit Grundfläche $A = L \times L$ in der (x, y)-Ebene eingeschlossen. In z-Richtung wird das Gas durch eine harte Wand bei $z = 0$ und nach oben hin durch die Gravitationskraft gebunden. Die Einteilchen-Energieeigenwerte sind für dieses Problem in guter Näherung durch

$$E_{\vec{n}} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \left(n_x^2 + n_y^2\right) + mgh_0 n_z^{\frac{2}{3}}, \qquad h_0 = \left(\frac{9\pi^2\hbar^2}{8m^2 g}\right)^{\frac{1}{3}}, \tag{1}$$

gegeben, wobei $n_{x,y} \in \mathbb{Z}$, $n_z = 1, 2, \ldots, \infty$ und $g \simeq 9.81$ m/s^2.

(a) Vergleichen Sie die Verteilung der Energieeigenwerte $E_{\vec{n}}$ mit denen eines Teilchens in einer 3D Box und argumentieren Sie rein qualitativ, warum es auch in diesem Fall zu einer Bose-Einstein-Kondensation kommen kann.

(b) Leiten Sie aus Gleichung (1) die Zustandsdichte

$$D(E) = \frac{A}{2\pi}\frac{m}{\hbar^2}\left(\frac{E}{mgh_0}\right)^{\frac{3}{2}} = KE^{\frac{3}{2}} \tag{2}$$

für dieses System ab.

(c) Berechnen Sie einen Ausdruck für die Teilchenzahl N und die Kondensationstemperatur T_c für das Bose-Gas im Schwerefeld. Schreiben Sie das Resultat als

$$\frac{T_c}{T_g} = \eta \times \left(\frac{h_0^2}{A}N\right)^{\gamma}, \tag{3}$$

wobei $T_g = (mgh_0)/k_B$, und bestimmen Sie die numerischen Koeffizienten η und γ.

(d) Berechnen Sie h_0, T_g und T_c für ein Gas aus $N = 10^5$ Rubidium-Atomen der Masse $m = 85$ amu und für $L = 100\,\mu$m.

Kreuzerl für: 16(a+b); 16(c+d); 17(a+b); 17(c) ; 18(a+b); 18(c+d)