

Statistische Physik I — Plenum 1

(Plenum: Do. 16.03.2023)

1. Stirling Formel:

Betrachten Sie die Darstellung der Fakultät $n!$ als Spezialfall der Gamma-Funktion, d.h.,

$$n! = \Gamma(n + 1) = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx.$$

- Skizzieren Sie den Verlauf des Integranden $f(x) = x^n e^{-x}$ für große n .
- Schreiben Sie den Integranden als Exponentialfunktion, $f(x) = e^{g(x)}$, und entwickeln Sie den Exponenten $g(x)$ um sein Maximum.
- Leiten Sie daraus die Stirling Formel

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

für große n her.

- Begründen Sie die weitere Näherung

$$\log(n!) \approx n \log(n) - n$$

anhand eines konkreten Zahlenbeispiels.

2. Stirling-Wärmepumpe:

Betrachten Sie einen Kreisprozess (Stirling-Zyklus), bei dem ein ideales Gas, ausgehend von einem Gleichgewichtszustand mit Temperatur T_1 und Volumen V_1 , folgende Schritte durchläuft:

- Isotherme Kompression (gekoppelt an Wärmebad mit Temperatur T_1),
- Isochore Abkühlung (bei Volumen V_2) durch Kopplung an Wärmebad mit Temperatur $T_2 < T_1$,
- Isotherme Expansion (gekoppelt an Wärmebad mit Temperatur T_2),
- Isochore Erwärmung durch Kopplung an Wärmebad mit Temperatur T_1 .

Die Zahl N der Atome im Gas bleibt konstant.

- Skizzieren Sie den Kreisprozess im p - V und T - S Diagramm und geben Sie (ohne Rechnung) das Vorzeichen der in jedem Schritt am System geleisteten Arbeit ΔW_j , ($j=i,ii,iii,iv$) und der in jedem Schritt vom System aufgenommenen Wärmemenge ΔQ_j an.
- Berechnen Sie für jeden der Schritte $j=i,ii,iii,iv$ die vom System geleistete Arbeit ΔW_j und die vom System aufgenommene Wärme ΔQ_j als Funktionen der Temperaturen und Volumina der jeweiligen Anfangs- und Endzustände. Benutzen Sie dazu die thermische und kalorische Zustandsgleichung.

- (c) Leiten Sie einen Ausdruck für die insgesamt am System geleistete Arbeit W und für die Heizeffektivität

$$\eta^{\text{H}} = \frac{-Q_1}{W},$$

her, wobei Q_1 die vom warmen Reservoir (T_1) ans System übertragene Wärme bezeichnet. Interpretieren Sie η^{H} . Vergleichen Sie η^{H} einer Stirling-Wärmepumpe, die mit $V_1/V_2 = 10$ zwischen zwei Temperaturen $T_1 = 300$ K and $T_2 = 270$ K arbeitet, mit der direkten Umwandlung von mechanischer oder elektrischer Arbeit in Wärme, $\eta^{\text{H}} = 1$.