Statistische Physik I — Übungsblatt 2

(Tutorium: Fr. 21.04.2023)

4. **Thermodynamische Potentiale: magnetisches System**:

Bei einem reversiblen Prozess ändert sich die innere Energie E eines magnetischen Systems gemäß

$$dE(S, M, N) = T\,dS + \mathcal{B}\,dM + \mu\,dN,$$

wobei B das magnetische Feld (zB in z-Richtung) ist und $M = \sum_i \langle \mathrm{m}_i \rangle$ die totale (d.h., extensive) Magnetisierung (in z-Richtung) der Probe als Summe der mikroskopischen magnetischen Dipole m_i im Material beschreibt.

(a) Bestimmen Sie daraus analog zur Vorlesung für dieses System die thermodynamischen Potentiale $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}(S, \mathcal{B}, N)$, $F \equiv F(T, M, N)$ und $G \equiv G(T, \mathcal{B}, N)$ und ihre Differentiale.

(b) Für ein paramagnetisches System aus N nicht welchselwirkenden Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen (d.h., die lokalen magnetischen Dipole können nur die zwei Werte $\mathrm{m}_i = \pm\,\bar{m}$ annehmen) erhalten wir

$$G(T, \mathcal{B}, N) = -k_{\mathrm{B}} T N \ln \left[2 \cosh \left(\frac{\bar{m}\,\mathcal{B}}{k_{\mathrm{B}} T} \right) \right].$$

Leiten Sie daraus mittels Differenzieren einen Ausdruck für die Magnetisierung M ab.

(c) Berechnen Sie die Wärmekapazität dieses paramagnetischen Systems in einem konstanten magnetischen Feld,

$$C_{\mathcal{B}} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{\mathcal{B}, N},$$

sowie die magnetische Suszeptibilität bei konstanter Temperatur,

$$\chi_T = \mu_0 \left(\frac{\partial M}{\partial \mathcal{B}} \right)_{T, N}.$$

(d) Argumentieren Sie zuerst ohne Rechnung ob $C_M > C_{\mathcal{B}}$ oder $C_M < C_{\mathcal{B}}$, wobei C_M die Wärmekapazität eines Paramagneten bei konstanter Magnetisierung bezeichnet. Leiten Sie dann einen expliziten Ausdruck für C_M für ab.

Hinweis. Für (c) und (d) ist es wichtig, dass die geeigneten thermodynamischen Potentiale und die richtigen unabhängigen Variablen gewählt werden.

5. **Das Tonks-Girardeau Gas: harte Kugeln in 1D**:

Betrachten Sie ein Gas bestehend aus N harten Kugeln (Tonks-Girardeau Gas) in einer Dimension. Die harten Kugeln haben alle den Durchmesser d und wechselwirken ansonsten nicht miteinander. Die entsprechende Hamiltonfunktion lautet

$$H(\underline{x}, \underline{p}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i=2}^{N} \mathcal{V}_{\mathrm{hart}}(|x_i - x_{i-1}|),$$

wobei $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)^\top$ und $\underline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_N)^\top$ die Orte und Impulse der N Teilchen zusammenfassen, und

$$\mathcal{V}_{\text{hart}}(|x|) = \begin{cases} \infty & \text{für } |x| \leq d \\ 0 & \text{für } |x| > d \end{cases}.$$

(a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme $Z_{\text{K}}(T, V, N)$ des Tonks-Girardeau Gases in einer Dimension ($V \equiv L$ ist die lineare Größe des Systems).
Hinweis: Machen Sie eine Skizze mit einer konkreten Anordnung von Kugeln mit $x_{i+1} > x_i$ als Hilfestellung zur Berechnung des Volumsintegrals. Welches Volumen steht für die erste Kugel bei gegebenen Positionen $x_2, \ldots, x_N$ der restlichen Kugeln zur Verfügung? Welche Integrationsgrenzen ergeben sich daher für x_2, x_3, usw.?

(b) Berechnen Sie die (Helmholtzsche) Freie Energie $F(T, V, N)$ und die Entropie $S(T, V, N)$ des Systems, und leiten Sie auch die thermische und kalorische Zustandsgleichungen her. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse durch einen Vergleich mit den entsprechenden Ausdrücken des idealen und des van der Waals Gases.

6. **Virialsatz**:

Gegeben sei ein räumlich gebundenes System aus N Teilchen mit Hamiltonfunktion

$$H(\underline{q}, \underline{p}) = \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m} + V(\underline{q}) = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}.$$

Das System is durch einen Vektor $\pi = (\underline{q}, \underline{p}) = (q_1, q_2, ..., p_1, p_2, ...)$ im $6N$-dimensionalen Phasenraum beschrieben.

(a) Zeigen Sie die allgemeine Gültigkeit des Virialsatzes

$$\left\langle \pi_i \frac{\partial H}{\partial \pi_j} \right\rangle_{\text{K}} = k_{\text{B}} T \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, 6N,$$

wobei $\langle \ldots \rangle_{\text{K}}$ den Mittelwert mit der kanonischen Phasenraumdichte ρ_{K} bezeichnet.

(b) Zeigen Sie damit, dass für ein System aus N gekoppelten 3D harmonischen Oszillatoren mit

$$V(\underline{q}) \equiv E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3N} K_{ij} q_i q_j, \qquad \text{wobei} \qquad K_{ij} = K_{ji},$$

die Mittelwerte der potentiellen und kinetischen Energie den universellen Wert

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \langle E_{\text{pot}} \rangle = \frac{3}{2} N k_{\text{B}} T,$$

annehmen.

Kreuzerl für: 4(a) + (b); 4(c); 4(d); 5(a); 5(b); 6(a)+(b)