1. Lagrange-Faktor

(a) Seien f und g stetig differenzierbare Funktionen von x und y. Zeige, dass

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_g = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x^{-1}.$$

(b) Sei nun f stationär unter konstantem g. Zeige, dass es einen Skalar λ gibt, sodass $f - \lambda g$ auch stationär ist und gib λ explizit an.

(a) Es seien $f(x, y)$ und $g(x, y)$ jeweils Funktionen von x und y. Wir bilden die beiden totalen Differentiale df und dg:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy, \tag{1.1}$$

$$dg = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x dy. \tag{1.2}$$

Es sei nun gefordert, dass f nach x differenziert wird, wobei wir g konstant halten. Es folgt daher $dg = 0$, was uns eine Verknüpfung von dy mit dx ermöglicht:

$$0 = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x dy \implies dy = -\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x^{-1} dx. \tag{1.3}$$

Setzen wir nun dy aus (1.3) in (1.1) ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned} df &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy \overset{(1.1)}{=} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x^{-1} dx = \\ &= \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x^{-1}\right] dx \end{aligned}$$

Da mit $g(x, y) = \text{konst.}$ die Funktion $f(x, y)$ nur noch einen Freiheitsgrad hat, entspricht das partielle Differential $(\partial f/\partial x)_g$ dem totalen Differential $(df/dx)_g$. Es folgt somit:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_g = \left(\frac{df}{dx}\right)_g = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x^{-1}. \quad \square \tag{1.4}$$

Gleiche Argumentation führt uns im Falle einer Differentiation nach y auf:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_g = \left(\frac{df}{dy}\right)_g = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y^{-1} \tag{1.5}$$

(b) Es soll nun f stationär sein (das heißt, alle Ableitungen verschwinden an einem stationären Punkt), wieder unter der Voraussetzung, dass g konstant ist:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_g = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_g = 0. \tag{1.6}$$

Untersuchen wir nun die Funktion $f - \lambda g$ sollen auch hier stationäre Punkte nach der Relation (1.6) zu finden sein. Beginnen wir mit der partiellen Ableitung nach x:

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{\partial (f - \lambda g)}{\partial x}\right)_y = \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y - \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y = \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x^{-1} - \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y \overset{(1.4)}{=} \\
&= \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x^{-1} - \lambda\right] \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y .
\end{aligned}$$

Damit jene Gleichung erfüllt werden kann, muss für den Skalar λ gelten:

$$\lambda = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x^{-1} = \left(\frac{\partial f}{\partial g}\right)_x . \tag{1.7}$$

Für einen stationären Punkt muss λ allerdings auch für den Fall der Ableitung nach y gelten. Eine analoge Rechnung mit der partiellen Differentiation nach y führt uns auf:

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{\partial (f - \lambda g)}{\partial y}\right)_x = \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x - \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x \overset{(1.7)}{=} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x - \left(\frac{\partial f}{\partial g}\right)_x \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x = \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x - .
\end{aligned}$$

$f - \lambda g$ ist mit dem Skalar λ aus (1.7) somit auch nach y stationär.

2. Legendre-Transformation einer Feder

Eine Feder der Länge L habe die innere Energie $E_{k,L_1}(L) = +k(L-L_1)^2/2$ mit der entspannten Länge L_1. Temperatur spiele keine Rolle. Durch Vorspannung wird die entspannte Länge der Feder auf $L_2 \neq L_1$ geändert.

(a) Finde die dafür notwendige mechanische Arbeit, wenn die Feder bei fester Gesamtlänge L eingespannt ist.

(b) Statt einer Einspannvorrichtung wird an die Feder nun ein Gewicht mit konstanter Kraft $f = -\partial E/\partial L$ gehängt. Finde die notwendige mechanische Arbeit unter dieser Voraussetzung, die Vorspannung von L_1 auf L_2 zu ändern.

(c) Zeige, dass die Legendre-Transformation $H_{k,L_1}(f) = \min_L(E_{k,L_1}(L) + fL)$ ein Potential ergibt, sodass die Differenz in (b) durch $H_{k,L_2}(f) - H_{k,L_1}(f)$ gegeben ist.

(a) Da es keine Wärmeänderung δQ gibt, folgt aus dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik folgt für die Änderung der inneren Energie dE:

$$dE = \delta W. \tag{2.1}$$

Wir definieren $E_1 := E_{k,L_1}(L)$ beziehungsweise $E_2 := E_{k,L_2}(L)$ und berechnen die aufzuwendende Arbeit bei einer Änderung der Vorspannung ($L_1 \to L_2$) unter der Bedingung, dass $L =$ konst.. Es folgt:

$$\begin{aligned} W &= \int_{E_1}^{E_2} dE = \\ &= E_2 - E_1 = \\ &= \frac{k}{2}(L-L_2)^2 - \frac{k}{2}(L-L_1)^2 = \\ &= \frac{k}{2}\left[L_2^2 - L_1^2 - 2L(L_2 - L_1)\right]. \end{aligned}$$

Mit der Längenänderung $\Delta L = L_2 - L_1$ und $L_1^2 - L_2^2 = (L_1 - L_2)(L_1 + L_2)$ können wir die Arbeit W kompakter ausdrücken als:

$$W = -\frac{k}{2}(2L - L_1 - L_2)\Delta L. \tag{2.2}$$

(b) Wirkt nun auf die Feder die konstante Kraft $f = -\partial E/\partial L = -k(L - L_1) =$ konst., kann die aufzuwendende Arbeit berechnet werden über $\delta W = f dL$. Daher ergibt sich:

$$\begin{aligned} W &= \int_{L_1}^{L_2} dL\, f = \\ &= -\left(\frac{\partial E}{\partial L}\right)\int_{L_1}^{L_2} dL = \\ &= -k(L - L_1)\Delta L. \end{aligned}$$

Wir erhalten das simple Ergebnis:

$$W = -f\Delta L. \tag{2.3}$$

(c) Es soll abschließend die Legendre-Transformation von $E_{k,L_1}(L)$ zu $H_{k,L_1}(f)$ durchgeführt werden. Wir können uns L über die Kraft f (als Ableitung der Energie) ausdrücken:

$$f = -\frac{\partial E_{k,L_1}}{\partial L} = -k(L_1 - L) \implies L = L_1 + \frac{f}{k}.$$

Ersetzen wir L in der Relation $H_{k,L_1} = E_{k,L_1} + fL$ mit dem oberen Ausdruck folgt daraus die neue Größe H_{k,L_1}:

$$H_{k,L_1}(f) = -\frac{k}{2}(L(f) - L_1)^2 + fL(f) = -\frac{k}{2}(L_1 + \frac{f}{k} - L_1)^2 + fL_1 + \frac{f^2}{k} = \frac{f^2}{2k} + fL_1.$$

Wir erhalten das neue Potential:

$$H_{k,L}(f) = \frac{f^2}{2k} + fL. \tag{2.4}$$

Bilden wir die Differenz bei zwei verschiedenen Feder-Vorspannungen L_1 und L_2, erhalten wir das gleiche Ergebnis wie in (2.3), da es sich bei (2.4) um ein Potential handelt:

$$\Delta H = H_{k,L_2}(f) - H_{k,L_1}(f) = \frac{f^2}{2k} + fL_2 - \frac{f^2}{2k} - fL_1 = f\Delta L \quad \square$$

3. Cocktail of Life

In einer Bar seien 42 Flaschen verschiedener Spirituosen und Säfte.

(a) Schätze die Wahrscheinlichkeit $P(\text{Cocktail}|\text{John})$, dass der Bartender John dieser Bar einen bekannten Cocktail deiner Wahl mit mindestens 3 Zutaten durch Zufall zufriedenstellend mischt. Der Barkeeper wisse die Anzahl der Zutaten für den Cocktail und die Größe des Glases, aber sonst nichts. Wie hängt die Wahrscheinlichkeit von der Toleranz deines Gaumens ab?

(b) Der Bartender Bob kennt nicht einmal die Anzahl an Zutaten und lässt einen Münzwurf bei jeder Flasche entscheiden, ob er damit mischt. Schätze die Wahrscheinlichkeit $P(\text{Cocktail}|\text{Bob})$ unter sonst gleichen Voraussetzungen, wie bei John.

(c) Drücke die Wahrscheinlichkeiten aus (a) und (b) und deren Toleranzbreite durch die Entropie $S = -\log_2(P)$ in Bits in der Form $S + \Delta S$ aus.

Der Bartender befüllt das Glas nach Auswahl der Zutaten nun kontinuierlich, wobei die Gelungenheit des Cocktails nun von der Toleranz unseres Gaumens abhängt.

(a) Wir führen eine „Gaumentoleranz“ Δx_i ein, sprich, eine Intervall $[x_i - \Delta x_i, x_i + \Delta x_i]$ bei welchem der Kunde den Cocktail als richtig befindet. Das Hinzufügen einer neuen Zutat schränkt durch die fixe (bekannte) Größe des Glases die nachfolgenden Füllmengen x_j ein — insgesamt muss das Glas vollständig aufgefüllt werden. Wir verstehen nun x_i als Volumensanteil des Glases, Δx_i als dessen Schwankungsbreite — wir setzen voraus, dass sich die Toleranzen *nicht* überlappen dürfen. Die Wahrscheinlichkeit einer richtigen Befüllung lässt sich als Verhältnis zwischen den akzeptablen und möglichen Realisierungsmöglichkeiten $\Omega = \Omega_{\text{korr}}/\Omega_{\text{ges}}$ berechnen. Ω_{korr} entspricht den Realisierungsmöglichkeiten, den Cocktail unter Einbezug der Toleranzbreite richtig zu mischen:

$$\begin{aligned}\Omega_{\text{korr}} &= \int_{t_{k-3}+x_{k-2}-\Delta x_{k-2}}^{t_{k-3}+x_{k-2}+\Delta x_{k-2}} dt_{k-2} \ldots \int_{t_0+x_1-\Delta x_1}^{t_0+x_1+\Delta x_1} dt_1 \int_{x_0-\Delta x_0}^{x_0+\Delta x_0} dt_0 = \\ &= 2\Delta x_{k-2} \int_{t_{k-4}+x_{k-3}-\Delta x_{k-3}}^{t_{k-4}+x_{k-3}+\Delta x_{k-3}} dt_{k-3} \ldots \int_{t_0+x_1-\Delta x_1}^{t_0+x_1+\Delta x_1} dt_1 \int_{x_0-\Delta x_0}^{x_0+\Delta x_0} dt_0 = \\ &= 2^{k-1} \Delta x_{k-2} \ldots \Delta x_1 \Delta x_0.\end{aligned}$$

Das Ergebnis hätten wir auch durch Intuition erraten können; dennoch beachten wir, dass wir in der Integration immer den vorhergehenden Füllstand miteinbeziehen. Zudem, brauchen wir nur $k-1$ Zutaten in den Realisierungsmöglichkeiten miteinbeziehen, da durch die bekannte Größe des Glases die Füllmenge der letzten Zutat exakt festgelegt ist. Die mögliche Menge an Realisierungsmöglichkeiten Ω_{ges} beträgt:

$$\begin{aligned}\Omega_{\text{ges}} &= \int_0^1 dt_{k-2} \ldots \int_0^{t_2} dt_1 \int_0^{t_1} dt_0 = \\ &= \frac{1}{1} \int_0^1 dt_{k-2} \ldots \int_0^{t_3} dt_2 \int_0^{t_2} dt_1\, t_1 = \\ &= \frac{1}{1 \cdot 2} \int_0^1 dt_{k-2} \ldots \int_0^{t_4} dt_3 \int_0^{t_3} dt_2\, t_2^2 = \frac{1}{(k-1)!} -\end{aligned}$$

Zusammen ergibt nun die Wahrscheinlichkeit, k Zutaten richtig einzuschenken:

$$P_{\text{c}}(k; \Delta c) = 2^{k-1}(k-1)! \prod_{i=0}^{k-2} \Delta x_i. \tag{3.1}$$

Das John überhaupt die richtigen Zutaten auswählt ist ein Problem der Kombinatorik: Wir nehmen an, dass John die Zutaten — einmal ausgewählt — *nicht* mehr zurücklegen darf und das die Reihenfolge *keine* Rolle spielt. Mit jeder gewählten Zutat, nimmt somit sowohl die Menge der verbleibenden Zutaten ab, allerdings auch die Möglichkeiten eine richtige Zutat zu erwischen. Insgesamt wird die Wahrscheinlichkeit bei k korrekten Zutaten zu:

$$P_{\mathrm{z}}(k;N) = \prod_{n=0}^{k-1} \frac{k-n}{N-n} = \binom{N}{k}^{-1}. \tag{3.2}$$

Insgesamt beträgt die Gesamtwahrscheinlichkeit einen richtigen Cocktail zu mischen also $P_{\mathrm{J}}(k;N,\Delta c) = P_{\mathrm{c}}(k;\Delta c) \cdot P_{\mathrm{z}}(k;N)$

$$P_{\mathrm{J}}(k;N,\Delta c) = 2^{k-1}(k-1)! \prod_{i=0}^{k-2} \Delta x_i \prod_{n=0}^{k-1} \frac{k-n}{N-n}. \tag{3.3}$$

(b) Falls nun aber Bob vor der Wahl einer jeden Zutat einen Münze werfen soll, ändert sich in Vergleich zu (3.3) nur die Ziehungs-Wahrscheinlichkeit $P_{\mathrm{z}}(k;N) = 1/2^N$ — es muss für einen richtigen Cocktail jedes Mal die Münze richtig fallen, was dem N-fachen Produkt der Wurf-Wahrscheinlichkeit $1/2$ entspricht. Somit gilt:

$$P_{\mathrm{z}}(N) = \frac{1}{2^N} \tag{3.4}$$

Insgesamt wird die Wahrscheinlichkeit, dass Bob einen richtigen Cocktail mischt, zu:

$$P_{\mathrm{B}}(k;N,M) = \frac{(k-1)!}{2^{N-k+1}} \prod_{i=0}^{k-2} \Delta x_i \tag{3.5}$$

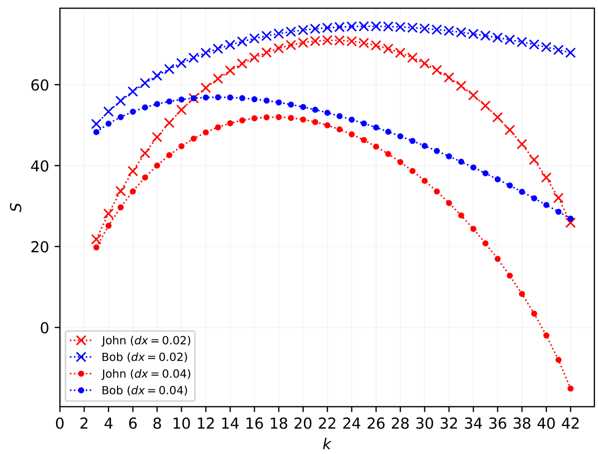

Abb. 1: Entropie S als Funktion der möglichen Zutaten k.

(c) Die Entropie lässt sich mit der in der Angabe gegebenen Formel berechnen ($S = -\log_2(P)$); es sei zu beachten, dass eine Basistransformation des Logarithmus durch die Relation $\log_2(P) = \log(P)/\log(2)$ erfolgt.

4. Entropie eines Schwarzen Loches

Aufgrund des Unruh Effekts emittiert ein nicht-rotierendes, ungeladenes Schwarzes Loch der Masse M thermische Schwarzkörperstrahlung entsprechend der Temperatur

$$T = \frac{\hbar c^3}{G k_\mathrm{B}} \frac{1}{8\pi M}.$$

Wir nehmen an, dass zugeführte Wärme nur in Form von Masse aufgenommen werden kann $\delta Q = c^2 dM$, wenn es keine anderen internen Freiheitsgrade gibt. Zeige, dass unter dieser Annahme die Entropie nur von der Fläche des Ereignishorizontes A abhängt:

$$S = k_\mathrm{B} \frac{c^3}{\hbar G} \frac{A}{4}.$$

mit $A = 4\pi r_\mathrm{s}^2$ und $r_\mathrm{s} = 2GM/c^2$. Hinweis: $S = \delta Q/T$

Wir nutzen den 2. Hauptsatz der Thermodynamik für reversible Prozesse — also $dS = \delta Q/T$ — und setzen schließlich für δQ und T ein:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = c^2 \frac{dM}{T} = c^2 \frac{G k_\mathrm{B}}{\hbar c^3} 8\pi M dM = \frac{k_\mathrm{B}}{\hbar} \frac{G^2}{c^4} \frac{c^3}{G} 8\pi M dM = \frac{c^3}{G} \frac{k_\mathrm{B}}{\hbar} 2\pi \left(\frac{4G^2}{c^4} \right) M dM$$

Die Gesamtentropie S ergibt sich durch Integration unter der Annahme eines reversiblen Wachstumsprozessen von 0 bis M:

$$\begin{aligned} S &= \frac{c^3}{G} \frac{k_\mathrm{B}}{\hbar} 2\pi \left(\frac{4G^2}{c^4} \right) \int_0^M dM' \, M' = \\ &= \frac{c^3}{G} \frac{k_\mathrm{B}}{\hbar} 2\pi \left(\frac{4G^2}{c^4} \right) \frac{M^2}{2} = \\ &= \frac{k_\mathrm{B}}{\hbar} \frac{c^3}{G} \frac{4\pi}{4} \left(\frac{2GM}{c^2} \right)^2 = \\ &= \frac{k_\mathrm{B}}{\hbar} \frac{c^3}{G} \frac{4\pi r_\mathrm{s}^2}{4} = \\ &= k_\mathrm{B} \frac{c^3}{\hbar G} \frac{A}{4}. \end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, dass die unter diesen Annahmen Entropie ausschließlich von Naturkonstanten und der Oberfläche des Schwarzen Loches abhängt.