1 Lagrange Faktor

(a) Seien f und g stetig differenzierbare Funktionen von x und y. Zeige, dass

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_g = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x^{-1}.$$

(b) Sei nun f stationär unter konstantem g. Zeige, dass es einen Skalar λ gibt, sodass $f - \lambda g$ auch stationär ist und gib λ explizit an.

2 Legendre Transformation einer Feder

Eine Feder mit Spannschloss der Gesamtlänge L habe die innere Energie $E_{k,L_1}(L) = -k(L-L_1)^2/2$ mit der einstellbaren entspannten Länge L_1. Temperatur spiele keine Rolle. Am Spannschloss wird die entspannte Länge der Feder von L_1 auf $L_2 \neq L_1$ geändert.

(a) Finde die dafür notwendige mechanische Arbeit, wenn die Feder zwischen zwei Punkten bei fester Gesamtlänge L gehalten wird.

(b) Die Feder wird nun nur an einem Ende festgehalten. Am anderen Ende wird ein Gewicht mit konstanter Kraft $f = -\partial E/\partial L$ gehängt. Finde die notwendige mechanische Arbeit unter dieser Voraussetzung, die entspannte Länge von L_1 auf L_2 zu ändern.

(c) Zeige, dass die Legendre Transformation $H_{k,L_1}(f) = \min_L(E_{k,L_1}(L) + fL)$ ein Potential ergibt, sodass die Differenz in (b) durch $H_{k,L_2}(f) - H_{k,L_1}(f)$ gegeben ist.

3 Cocktail of Life

In einer Bar seien 42 Flaschen verschiedener Spirituosen und Säfte.

(a) Schätze die Wahrscheinlichkeit $P(\text{Cocktail}|\text{John})$, dass der Bartender John dieser Bar einen Cocktail deiner Wahl mit mindestens 3 Zutaten durch Zufall zufriedenstellend mischt. Der Barkeeper wisse die Anzahl der Zutaten für den Cocktail und die Größe des Glases, aber sonst nichts. Wie hängt die Wahrscheinlichkeit von der tolerierten Abweichung vom Sollmischverhältnis ab?

(b) Der Bartender Bob kennt nicht einmal die Anzahl an Zutaten und lässt einen Münzwurf bei jeder Flasche entscheiden, ob er damit mischt oder nicht. Schätze die Wahrscheinlichkeit $P(\text{Cocktail}|\text{Bob})$ unter sonst gleichen Voraussetzungen, wie bei John.

(c) Drücke die Wahrscheinlichkeiten aus (a) und (b) durch die Entropie $S = -\log_2 P$ in Bits aus und schätze die Schwankungsbreite ΔS je nach tolerierter Verhältnisabweichung.

4 Entropie eines Schwarzen Loches

Aufgrund des Unruh Effekts emittiert ein nicht-rotierendes, ungeladenes Schwarzes Loch der Masse M thermische Schwarzkörperstrahlung entsprechend der Temperatur

$$T = \frac{\hbar c^3}{G k_\mathrm{B}} \frac{1}{8\pi M}.$$

Wir nehmen an, dass zugeführte Wärme nur in Form von Masse aufgenommen werden kann $dQ = c^2 dM$, wenn es keine anderen internen Freiheitsgrade gibt. Zeige, dass unter dieser Annahme die Entropie nur von der Fläche des Ereignishorizontes A abhängt:

$$S = k_\mathrm{B} \frac{c^3}{\hbar G} \frac{A}{4}$$

mit $A = 4\pi r_\mathrm{s}^2$ und $r_\mathrm{s} = 2GM/c^2$. Hinweis: $dS = dQ/T$.