

5) a)

kalorische Zustandsgleichung ideales Gas

$$E = \frac{3}{2} N k_B T$$

bei konstanter Teilchenzahl N folgt daraus

$$dE = \frac{3}{2} N k_B dT$$

Zeitgleich haben wir aus dem ersten Hauptsatz

$$dE = \delta Q + \delta W = \delta W = -p dV$$

 $\delta Q = 0$ da keine Wärmeübertragung

$$\Rightarrow \frac{3}{2} N k_B dT = -p dV = - \frac{N k_B T}{V} dV$$

 $= \frac{N k_B T}{V}$; thermische Zustandsglg. ideales Gas

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} \frac{1}{T} dT = - \frac{1}{V} dV$$

für $\frac{\Delta V}{V} \ll 1$ folgt direkt: $\Delta T = -\frac{2}{3} T \frac{\Delta V}{V} //$

5) b)

gehen analog wie in a) vor

mit $E = \frac{3}{2} N k_B T - \frac{aN^2}{V}$ folgt

$$dE = \frac{3}{2} N k_B dT + a \frac{N^2}{V^2} dV \quad \text{und} \quad dE = -p dV = \frac{aN^2}{V^2} dV - \frac{N k_B T}{V - Nb} dV$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \frac{1}{T} dT = - \frac{1}{V - Nb} dV$$

$$\text{bzw.:} \quad \Delta T = -\frac{2}{3} \frac{\Delta V}{V - Nb} T \quad \left(\text{da} \quad \frac{\Delta V}{V - Nb} \ll 1 \right)$$

6) a) Jedes Glied der Kette hat Länge l_0 . Die gesamte ~~Länge~~ Länge der ~~Kette~~ Kette ist daher gegeben durch ein vielfaches dieser Länge, also $L = K l_0$, mit $K \in \mathbb{Z}$.

K ist nun gegeben durch die Anzahl an Kettengliedern in die positive Richtung, minus der Anzahl an Kettengliedern in die

negative Richtung, $K = N_+ - N_-$

$$\rightarrow \frac{L}{L_0} = N_+ - N_-.$$

Die gesamte Anzahl an Kellengliedern ist

$$\rightarrow N = N_+ + N_-.$$

Daraus haben wir $N_- = N - N_+$, also

$$\frac{L}{L_0} = 2N_+ - N.$$

\Rightarrow Für ein gegebenes N , ist L direkt berechenbar bzw. bestimmt durch die Anzahl an pos. Kellengliedern N_+

\Rightarrow Das Problem reduziert sich also darauf, die Anzahl an Möglichkeiten abzuzählen, wie man N_+ Kellenglieder auf eine N -kellige Kette aufteilen kann.

\Rightarrow Dies ist das gleiche Problem, wie N_+ -unterscheidbare Bälle auf N leere Boxen zu verteilen, mit max. einem Ball pro Box.

\Rightarrow Die gesamte Anzahl an Möglichkeiten N_+ -unterscheidbare Bälle zu verteilen, ist gegeben durch das Produkt der Möglichkeiten wie man jeden einzelnen Ball verteilen kann. Für den ersten Ball hat man N Möglichkeiten, für den zweiten $(N-1)$ und für den letzten $(N-N_++1)$.

$$\rightarrow \text{Gesamtanzahl} = N \cdot (N-1) \cdots (N-N_++1) = \frac{N!}{(N-N_+)!}$$

\Rightarrow Da die Bälle, bzw. die Kellenglieder, aber unterscheidbar sind, müssen wir noch durch die Anzahl der möglichen Permutationen der Bälle dividieren, gegeben durch $N_+!$

$$\Rightarrow \Omega(L, N) = \frac{N!}{N_+! (N-N_+)!} = \binom{N}{N_+}$$

$$\text{da nun } N_+ = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{\epsilon_0} + N \right)$$

$$\Rightarrow \Omega(L, N) = \binom{N}{\frac{1}{2} \left(\frac{L}{\epsilon_0} + N \right)} //$$

b) Ausgeschrieben haben wir

$$\Omega(L, N) = \frac{N!}{\left(\frac{K+N}{2} \right)! \left(\frac{N-K}{2} \right)!} \quad \text{mit } K = \frac{L}{\epsilon_0}$$

für die Entropie wollen wir $\log(\Omega(L, N))$ berechnen

Für große Kellen, bzw. große N , können wir die Stirling Formel verwenden. Diese besagt, dass

$$\log(n!) = n \log(n) - n + O(\log n).$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \log(\Omega) &= N \log(N) - N - \left(\frac{N+K}{2} \right) \log \left(\frac{N+K}{2} \right) + \left(\frac{K+N}{2} \right) \\ &\quad - \left(\frac{N-K}{2} \right) \log \left(\frac{N-K}{2} \right) + \left(\frac{N-K}{2} \right) \\ &= N \log(N) - \left(\frac{N+K}{2} \right) \log \left(\frac{N+K}{2} \right) - \left(\frac{N-K}{2} \right) \log \left(\frac{N-K}{2} \right) \\ &= N \log(N) + N \ln(2) - \left(\frac{N+K}{2} \right) \log(N+K) - \left(\frac{N-K}{2} \right) \log(N-K) \end{aligned}$$

Schreiben nun um

$$\log(N+K) = \log(N) + \log\left(1 + \frac{K}{N}\right)$$

$$\log(N-K) = \log(N) + \log\left(1 - \frac{K}{N}\right)$$

Aus der Angabe wissen wir, dass $\frac{K}{N} \ll 1$

\Rightarrow Wir machen eine Taylor Entwicklung von

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

bis 2. Ordnung, da 1. Ordnung bei Summe Terme wie $\pm x$ wegfallen

$$\Rightarrow \log(N+K) = \log(N) + \frac{K}{N} - \frac{1}{2} \left(\frac{K}{N} \right)^2$$

$$\log(N-K) = \log(N) - \frac{K}{N} - \frac{1}{2} \left(\frac{K}{N} \right)^2$$

Einssetzen in $\log(\Omega)$ liefert

$$\begin{aligned} \log(\Omega) &= N \log(N) + N \log(2) - N \log(N) + \frac{N}{2} \left[2 \frac{1}{2} \left(\frac{K}{N} \right)^2 \right] + \frac{K}{2} \left[-2 \frac{K}{N} \right] \\ &= N \log(2) - \frac{1}{2} \frac{K^2}{N} = N \log(2) - \frac{L^2}{2NL_0^2} // \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F(T, L, N) = -k_B T \left[N \log(2) - \frac{L^2}{2NL_0^2} \right]$$

für die Kraft gilt $f = -\frac{\partial F}{\partial L}$

$$\Rightarrow f(T, L, N) = -k_B T \frac{L}{NL_0^2} //$$

7/a) Für das chem. Potential μ gilt

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{V, T} = 0$$

↑ da E nicht von N abhängt

Nun berechnen wir die Entropie S

$$\text{aus } E = 3pV \quad \text{und} \quad p = bT^4$$

$$\text{mit } b = \frac{\pi^2 k_B^4}{45 (\hbar c)^3}$$

$$\Rightarrow E = 3bVT^4 \Rightarrow T = \left(\frac{E}{3bV} \right)^{1/4}$$

$$\text{Aus } T = \left(\frac{\partial F}{\partial S} \right)_{V, N} \Rightarrow \frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_{V, N}$$

mit T von oben haben wir also

$$\rightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_{V, N} = (3bV)^{1/4} E^{-3/4}$$

Integration liefert

$$\Rightarrow S = (3bV)^{1/4} \frac{4}{3} E^{3/4} + \underbrace{C(V, N)}_{\text{Integrationskonstante}}$$

Integrationskonstante

$$\Rightarrow S(E, T) = (35V)^{3/4} \frac{4}{3} (35VT^4)^{1/4}$$

$$= \frac{4}{3} (35V) T^3 = \frac{4}{3} \frac{E}{T} //$$

7) b) Die Änderung der Entropie in der Zeit kann berechnet werden durch

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{T} \frac{\delta Q}{dt} = \frac{1}{T} \dot{Q}$$

Da wir uns im Gleichgewicht zwischen auf- und abgegebener Strahlungsleistung befinden, haben wir

$$\dot{Q}_{\text{ein}} - \dot{Q}_{\text{ab}} = 0$$

Unter der Annahme, dass ein-/abgestrahlte Photonen mit Sonnen-/Erdoberfläche im Gleichgewicht sind, folgt, dass

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS_{\text{ein}}}{dt} - \frac{dS_{\text{ab}}}{dt} = \dot{Q}_{\text{ein}} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_\oplus} \right)$$

Die eingestrahlte Leistung ist nun gegeben durch das Stefan-Boltzmann Gesetz

$$\dot{Q}_{\text{ein}} = \sigma A T_\oplus^4$$

$\cdot \pi R_\oplus^2$ (hier wird angenommen, dass die Sonnenstrahlen nur diesen Querschnitt erreichen)

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} = \sigma \pi R_\oplus^2 T_\oplus^4 \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_\oplus} \right) \approx -5,6 \cdot 10^{11} \text{ W/K} < 0 //$$

8) a) Da es sich bei dem Gesamtbehälter um ein nach außen abgeschlossenes System handelt, wird sich die Gesamtenergie E des Systemes nicht ändern. Sprich, es muss

$$E_{\text{vor}} = E_{\text{nach}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} N k_B T_1 + \frac{3}{2} N k_B T_2 = \frac{3}{2} 2 N k_B T'$$

$$\Leftrightarrow T' = \frac{1}{2} (T_1 + T_2) //$$

Die gesamte Änderung der Entropie ist nun gegeben durch die Summe der Entropieänderung der Teilsysteme, also

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

Die Entropieänderung eines Teilsystems bestimmen wir aus der Fundament-
-gleichung

$$dE = T dS - p dV + \mu dN$$

$\mu = 0$ da sich Teilchenzahl des Teilsystems nicht ändert

$$\Rightarrow dS = \frac{1}{T} [dE + p dV]$$

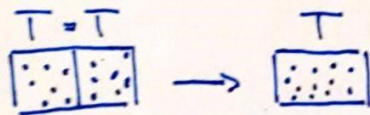
$$= \frac{3}{2} \frac{N k_B}{T} dT + \frac{N k_B}{V} dV$$

↑
aus kalorischer
Zustandsglg.

←
aus thermischer Zustandsglg.

Wir müssen nun aufpassen. Der Anteil an der Entropieänderung welcher durch $\frac{N k_B}{V} dV$ entsteht, wird auch "Mischenentropie" genannt und rührt von der Durchmischung von zwei unterscheidbaren Gasen her.

Wir arbeiten hier aber mit einem ununterscheidbaren Gas! haben also die Situation



Entropie bleibt gleich; Einführen einer Trennwand würde uns wieder in den Anfangszustand bringen

Nun wissen wir: Entropie ist eine Zustandsgröße, also unabhängig vom genauen Prozess zwischen zwei Endzuständen. Wissen, $T' = \frac{1}{2} (T_1 + T_2)$

\Rightarrow können Modellprozess entwerfen: i) Isochore Temperaturausgleich in beiden Volumina

ii) Entfernung der Trennwand.

$$\Rightarrow dS = \frac{3}{2} \frac{N k_B}{T} dT$$

$$\Leftrightarrow \Delta S_1 = \frac{3}{2} N k_B \int_{T_1}^{T'} \frac{1}{T} dT = \frac{3}{2} N k_B \ln\left(\frac{T'}{T_1}\right) //$$

$$\Rightarrow \Delta S_2 = \frac{3}{2} N k_B \ln\left(\frac{T'}{T_2}\right)$$

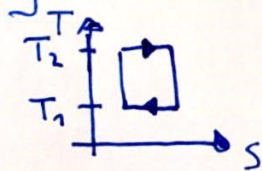
$$\Rightarrow \Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{3}{2} N k_B \ln\left(\frac{T'^2}{T_1 T_2}\right) //$$

Für $T_1 \neq T_2$ ist also $\Delta S \neq 0$ und der Prozess damit irreversibel!

8|b) Die Situation ist physikalisch ident zu a) und führt zu den gleichen Ergebnissen.

8|c) Der Gesamtbehälter ist nun nicht mehr nach außen hin isoliert, es wird eine Carnot Maschine damit betrieben.

Im T - S -Diagramm ist dieser



nach einem durchlaufenen Zyklus ist hier also $\Delta S = 0$

Suchen also jenes T' , für das $\Delta S = 0$ gilt

$$\text{aus } \Delta S \stackrel{!}{=} 0 = \frac{3}{2} N k_B \ln\left(\frac{T'^2}{T_1 T_2}\right)$$

$$\Rightarrow \text{dass } T' = \sqrt{T_1 T_2} //$$

da $\Delta S = 0$ ist, ist der Prozess reversibel