

## 13 Zustandsgleichungen (Testbeispiel 2021, 24 Punkte)

- (a) Geben Sie die natürlichen Variablen der thermodynamischen Potentiale  $E$ ,  $F$ ,  $H$  und  $G$  an. Geben Sie alle Legendre Transformationen an, die Paare dieser Potentiale ineinander überführen. Die Transformation zwischen  $E$  und  $F$  lautet etwa:  $F = E - ST$  mit  $S$  sodass  $(\partial E / \partial S)_{V,N} = T$ . (6P)

Pot.	nat. Var.	(Zusätzlich großkanonisch: $\mu$ : T, V, $\mu$ )
E	S, V, N	
F	T, V, N	
H	S, p, N	
G	T, p, N	

$$E = F + ST, \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N} = -S$$

$$E = H - pV, \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_{S,N} = V$$

$$E = G + ST - pV, \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{p,N} = -S, \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_{T,N} = V$$

$$F = E - ST, \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{V,N} = T$$

$$F = H - ST - pV, \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_{p,N} = T, \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_{S,N} = V$$

$$F = G - pV, \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_{T,N} = V$$

$$H = E + pV, \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{S,N} = -p$$

$$H = F + pV + ST, \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N} = -p, \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N} = -S$$

$$H = G + ST, \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{p,N} = -S$$

$$G = E - ST + pV, \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{V,N} = T, \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{S,N} = -p$$

$$G = F + pV, \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N} = -p$$

$$G = H - ST, \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_{p,N} = T$$

V	F	T	z.B.	E = F + TS	↗ in Pfeilrichtung
E	↗	G		$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -S$	↗ gegen Pfeilrichtung
S	H	P		G = E - TS + pV	↘ gegen / ↗ in Pfeilrichtung

(b) Kalorische und thermische Zustandsgleichung eines Stoffes seien jeweils gegeben durch

$$\text{I} \quad E = \theta \frac{N^3 (k_B T)^2}{V^2}, \quad \text{II} \quad p = \frac{2E}{V}$$

mit der Konstante  $\theta$ . Finden Sie die adiabatische Kompressibilität  $\kappa_S = -(\partial V / \partial p)_{S,N} / V$  des Stoffes als Funktion von  $T$ ,  $V$  und  $N$  und geben Sie deren Vorzeichen an. (6P)

$$\kappa_S = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_{S,N} = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_{S,N}^{-1}$$

Verwende für Ableitung unter  $S = \text{konst.}$

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_g = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_y - \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_x \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_y \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right)_x^{-1} \quad (\text{siehe Übung 1, Bsp. 1}) \quad \text{und}$$

identifiziere  $f \leftrightarrow p$ ,  $g \leftrightarrow S$ ,  $x \leftrightarrow V$ ,  $y \leftrightarrow E$

$$\rightarrow \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_{S,N} = \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_{E,N} - \left( \frac{\partial p}{\partial E} \right)_{V,N} \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_{E,N} \left( \frac{\partial S}{\partial E} \right)_{V,N}^{-1}$$

Ableitungen aus Grundgleichung d. Thermodynamik:

$$dE = T dS - p dV + \mu dN \rightarrow dS = \frac{1}{T} dE + \frac{p}{T} dV - \frac{\mu}{T} dN$$

$$\rightarrow \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_{E,N} = \frac{p}{T}, \quad \left( \frac{\partial S}{\partial E} \right)_{V,N} = \frac{1}{T}$$

$$\text{Weiters aus II: } \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_{E,N} = -\frac{2E}{V^2}, \quad \left( \frac{\partial p}{\partial E} \right)_{V,N} = \frac{2}{V}$$

$$\rightarrow \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_{S,N} = -\frac{2E}{V^2} - \frac{2}{V} \cdot \frac{p}{T} \cdot T \stackrel{\text{II}}{=} -\frac{p}{V} - \frac{2p}{V} = -\frac{3p}{V}$$

$$\rightarrow \underline{\kappa_S} = -\frac{1}{V} \cdot \left( -\frac{3p}{V} \right) = \frac{1}{3p} \stackrel{\text{II}}{=} \frac{V}{6E} \stackrel{\text{I}}{=} \underline{\underline{\frac{V^3}{6\theta N^3 (k_B T)^2}}}$$

### 14. Teilchen im homogenen Gravitationsfeld

Ein Teilchen der Masse  $m$  bewegt sich im homogenen Schwerfeld der Erde. Es ist begrenzt durch eine nach oben offene Box  $B$  mit ebener Grundfläche  $A$  bei  $q_z = 0$ . Die Hamiltonfunktion des Teilchens ist

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = mgq_z + \frac{p^2}{2m} \quad \text{mit} \quad p = |\mathbf{p}| \quad (14.1)$$

- (a) Zeigen Sie, dass sich für die mikrokanonische Zustandssumme  $\Omega(E, A, N = 1)$  für ein Teilchen der Energie  $E$  das folgende Ergebnis ergibt:

$$\Omega(E, A, N = 1) = \frac{1}{h^3} \int_B d^3q \int_{\mathbb{R}} d^3p \delta(H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - E) = \frac{4\pi A \sqrt{(2E)^3 m}}{3gh^3} \quad (14.2)$$

- (b) Zeigen Sie allgemein, dass die mikrokanonische Zustandssumme zweier ununterscheidbaren Teilchen ohne Wechselwirkung

$$\Omega(E, A, N = 2) = \frac{1}{2!h^6} \int_B d^3q_1 \int_B d^3q_2 \int_{\mathbb{R}} d^3p_1 \int_{\mathbb{R}} d^3p_2 \delta(H(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1) + H(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2) - E)$$

durch eine Faltung der Einteilchenzustandssumme  $\Omega(E, A, N = 1)$  berechnet werden kann:

$$\Omega(E, A, N = 2) = \frac{1}{2} \int_0^E dE_1 \Omega(E_1, A, 1) \Omega(E - E_1, A, 1) \quad (14.3)$$

- (c) Die Faltung ergibt  $\Omega(E, A, N = 2) = \pi^3 A^2 E^4 m / 6g^2 h^6$ . Geben Sie die Entropie des Zwei-Teilchensystems  $S(E, A, N = 2)$  als Funktion von  $E$  und  $A$  an und berechnen Sie damit die Wärmekapazität bei konstanter Grundfläche  $C_A$ .

**Hinweis:** mit  $c_i > 0$  und  $z > 0$

$$\int d\xi_1 \dots d\xi_n \delta(c_1 \xi_1^2 + \dots + c_n \xi_n^2 - z) = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \left( \frac{\pi^n}{c_1 \dots c_n} \right)^{1/2} z^{\frac{n}{2}-1} \quad (14.4)$$

- (a) Es soll die (mikrokanonische) Zustandssumme eines Teilchens mit Masse  $m$  im Schwerfeld bestimmt werden. Das Integral der Zustandssumme (14.2) wird hier auf zwei Arten gelöst werden, einmal in kartesischen Koordinaten und ein weiteres Mal in Kugelkoordinaten.

**Lösung in Kugelkoordinaten** Aufgrund der reinen Abhängigkeit vom Betragsquadrates des Impulses, wechseln wir für die Impuls-Integration in sphärische Koordinaten  $(p_x, p_y, p_z) \rightarrow (p, \vartheta_p, \varphi_p)$ , wobei die Winkel-Integration direkt ausgeführt werden dürfen:

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{h^3} \int_B d^3q \int_{\mathbb{R}} d^3p \delta \left( mgq_z + \frac{p^2}{2m} - E \right) = \\ &= \frac{1}{h^3} \int_0^A dA' \int_0^\infty dq_z \int_0^{2\pi} d\varphi_p \int_0^\pi d\vartheta_p \sin(\theta_p) \int_0^\infty dp p^2 \delta \left( mgq_z + \frac{p^2}{2m} - E \right) = \\ &= \frac{4\pi A}{h^3} \int_0^\infty dq_z \int_0^\infty dp p^2 \delta \left( mgq_z + \frac{p^2}{2m} - E \right). \end{aligned}$$

Der Impuls tritt in der Funktion  $g(p)$  in der  $\delta$ -Distribution auf; mit der Ableitung  $g'(p) = p/m$  und der folgenden Nullstelle kann die  $\delta$ -Funktion umgeschrieben werden:

$$0 = \frac{p^2}{2m} + mgq_z - E \implies p^* = \left| \pm \sqrt{2m(E - mgq_z)} \right|.$$

Da der Impuls  $p$  nach unserer Koordinatentransformation nur in  $p \in [0, \infty)$  definiert ist, können wir die negative Nullstelle direkt weglassen.

Um einen physikalischen Impuls zu garantieren, muss die kinetische Energie größer-gleich 0 sein — dies impliziert jedoch auch, dass die potentielle Energie  $mgq_z$  die totale Energie  $E$  nicht überschreiten darf und  $mgq_z < E$  erfüllen muss. Daher ist  $q_z$  gebunden im Intervall  $q_z \in [0, E/mg]$ ; wir forcieren dies indem wir eine zusätzliche Heaviside-Funktion  $\theta(E/mg - q_z)$  einfügen, was eine Einschränkung der Grenzen des Integrals über die Ortskoordinate ergeben. Daher gilt:

$$\begin{aligned}\Omega(E, A, 1) &= \frac{4\pi A}{h^3} \int_0^\infty dq_z \int_0^\infty dp p^2 \frac{\delta(p - p^*)}{p^*/m} \theta(E/mg - q_z) = \\ &= \frac{4\pi A}{h^3} m \int_0^{E/mg} dq_z p^* = \\ &= \frac{4\pi A}{h^3} m \int_0^{E/mg} dq_z \sqrt{2m(E - mgq_z)} = |\xi = 2m(E - mgq_z)| \\ &= \frac{4\pi A}{h^3} m \int_{2mE}^0 \frac{d\xi}{(-2m^2g)} \sqrt{\xi} = \\ &= \frac{2\pi A}{h^3 g} \frac{1}{m} \left[ \frac{2}{3} \xi^{3/2} \right]_0^{2mE} = \\ &= \frac{4\pi A}{3h^3 g} \frac{(2mE)^{3/2}}{m}.\end{aligned}$$

**Lösung in kartesischen Koordinaten** Eine Lösung in kartesischen Koordinaten erfordert die Verwendung des Hinweises (14.4), wobei wir die  $\delta$ -Distribution im Rahmen unserer Problemstellung folgendermaßen ausdrücken können:

$$\delta(c_1 \xi_1^2 + \dots + c_n \xi_n^2 - z) = \delta\left(\frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{1}{2m} p_y^2 + \frac{1}{2m} p_z^2 - \underbrace{(E - mgq_z)}_z\right).$$

Wir definieren  $z = E - mgq_z$  um uns Schreibarbeit zu ersparen. Zur Auswertung des Integrals wird die Gamma-Funktion  $\Gamma(n/2)$  benötigt, wobei wir Folgendes verwenden:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \quad \text{und} \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

In unserem Fall ist  $n = 3$ , daher ergibt sich der Vorfaktor aufgrund der Gamma-Funktion zu  $\Gamma(n/2) = \sqrt{\pi}/2$ . Wir sind nun bereit, das Integral zu lösen:

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{1}{h^3} \int_B d^3q \int_{\mathbb{R}} d^3p \delta\left(mgq_z + \frac{p^2}{2m} - E\right) = \\ &= \frac{1}{h^3} \int_0^A dA' \int_0^\infty dq_z \int_{-\infty}^\infty dp_x \int_{-\infty}^\infty dp_y \int_{-\infty}^\infty dp_z \delta\left(\frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{1}{2m} p_y^2 + \frac{1}{2m} p_z^2 - z\right) \stackrel{(14.4)}{=} \\ &= \frac{A}{h^3} \int_0^{E/mg} dq_z \frac{1}{\Gamma(3/2)} \left(\frac{\pi^3}{(1/2m)^3}\right)^{1/2} z^{\frac{3}{2}-1} = \\ &= \frac{2(2\pi m)^{3/2} A}{h^3 \sqrt{\pi}} \int_0^{E/mg} dq_z \sqrt{E - mgq_z} = |\xi = E - mgq_z| \\ &= \frac{2\pi(2m)^{3/2} A}{h^3} \frac{1}{mg} \int_0^E d\xi \xi^{1/2} = \\ &= \frac{2\pi(2m)^{3/2} A}{h^3} \frac{1}{mg} \left[ \frac{2}{3} \xi^{3/2} \right]_0^E = \\ &= \frac{4\pi(2m)^{3/2} A}{3h^3} \frac{1}{mg} E^{3/2}.\end{aligned}$$

Wie wir sehen, entspricht das Ergebnis in beiden Fällen der Angabe:

$$\Omega(E, A, N = 1) = \frac{4\pi A}{3h^3 g} \sqrt{(2E)^3 m}. \quad (14.5)$$

- (b) Fügen wir ein zweites Teilchen in unser System ein, nimmt entsprechend die Anzahl der Mikro-Zustände zu. Mit  $H(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1) \equiv H_1$  und  $H(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2) = H_2$  folgt:

$$\begin{aligned} \Omega(E, A, 2) &= \frac{1}{2} \int_0^E dE_1 \Omega(E_1, A, 1) \Omega(E - E_1, A, 1) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{h^6} \int_0^E dE_1 \int d^3 q_1 \int d^3 q_2 \int d^3 p_1 \int d^3 p_2 \delta(H_1 - E_1) \delta(H_2 + E_1 - E) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{h^6} \int d^3 q_1 \int d^3 q_2 \int d^3 p_1 \int d^3 p_2 \int_0^E dE_1 \delta(H_1 - E_1) \delta(H_2 + E_1 - E) = \\ &= \frac{1}{2! h^6} \int d^3 q_1 \int d^3 q_2 \int d^3 p_1 \int d^3 p_2 \delta(H_2 + H_1 - E). \quad \square \end{aligned}$$

- (c) Die Entropie folgt der Relation  $S = k_B \ln(\Omega)$  und ist in unserem Fall:

$$S = k_B \ln(\Omega(E, A, 2)) = k_B \left[ 2 \ln(A) + 4 \ln(E) + \ln \left( \frac{\pi^3 m}{6g^2 h^6} \right) \right].$$

Die Wärmekapazität bei konstanter Grundfläche ergibt sich aus der Entropieänderung mit der Temperatur; wir haben allerdings das Problem, dass wir vorerst die innere Energie  $E$  als Funktion der Temperatur  $T$  nicht kennen. Wir verwenden die folgende Beziehung:

$$\left( \frac{\partial S}{\partial E} \right)_{A, N} = \frac{1}{T} \implies \frac{1}{T} = \frac{\partial}{\partial E} (4k_B \ln(E)) = \frac{4k_B}{E} \implies E = 4k_B T.$$

Aus  $E = C_A T$  könnten wir eigentlich direkt die Wärmekapazität bei konstanter Grundfläche ablesen. Jedoch ist die Wärmekapazität bei konstanter Grundfläche definiert über:

$$T dS = \delta Q = C_A dT \implies C_A = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_A$$

Wir können gehen nun für die kalorische Zustandsgleichungen zeigen, dass das direkte Ablesen aus  $E = C_A T$  tatsächlich funktioniert:

$$C_A = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_A = T \left( \frac{\partial S}{\partial E} \right)_A \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_A = T \frac{1}{T} \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_A = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_A = 4k_B.$$

Schlussendlich finden wir also eine konstante Wärmekapazität vor (wie beim idealen Gas mit  $C_V = \frac{3}{2} N k_B$ ). Es gilt:

$$C_A = 4k_B \quad (14.6)$$



15) a)

A → B: das Gas ist thermisch isoliert, es findet also kein Wärmeaustausch statt

$$\Rightarrow \delta Q_{AB} = 0$$

zusätzlich expandiert das Gas gegen ein Vakuum (freie Expansion), hat also keinen "Gegendruck" gegen das es ankämpfen muss. Folglich muss es keine Arbeit verrichten

$$\Rightarrow \delta W_{AB} = 0$$

die innere Energie bleibt also konstant da

$$dE_{AB} = \delta W_{AB} + \delta Q_{AB} = 0 = \frac{3}{2} N k_B dT$$

$$\Leftrightarrow E_A = E_B$$

↑ aus  $E = \frac{3}{2} N k_B T$ , innere Energie für das ideale Gas



aus  $E_A = E_B$  folgt sofort: ~~aus~~  $T_A = T_B$  // es handelt sich also um einen isothermen Prozess

Die Drücke  $p_A$  und  $p_B$  erhalten wir aus der idealen Gasgleichung

$$\Rightarrow p_A = \frac{N k_B T_A}{V_A} // \quad \text{und} \quad p_B = \frac{N k_B T_B}{V_B} = \frac{N k_B T_A}{V_B} //$$

B → C: das Gas ist erneut thermisch isoliert, also

$$\delta Q_{BC} = 0$$

diesmal ist aber  $\delta W \neq 0$  da wir das Volumen gegen das Gas wieder auf das ursprüngliche Volumen komprimieren

$$\delta W_{BC} = -p dV$$

$$\text{mit } dE_{BC} = \delta W_{BC} + \delta Q_{BC} = -p dV = \frac{3}{2} N k_B dT$$

$$\text{folgt mit } p = \frac{N k_B T}{V}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \frac{1}{T} dT = -\frac{1}{V} dV$$



$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} \int_{T_B}^{T_C} \frac{1}{T} dT = - \int_{V_B}^{V_A} \frac{1}{V} dV$$

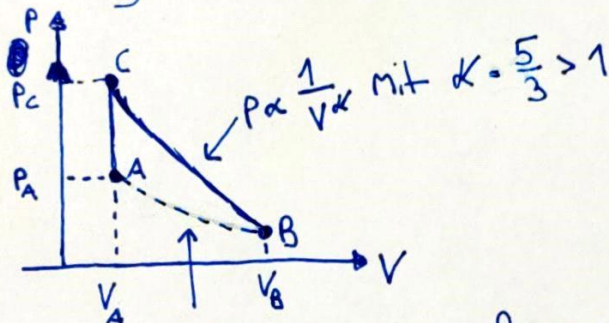
$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} \ln\left(\frac{T_C}{T_B}\right) = - \ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{T_C}{T_B}\right) = \ln\left(\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{-2/3}\right)$$

$$\Leftrightarrow T_C = T_B \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{-2/3} = T_B \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{2/3} = T_A \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{2/3}$$

der Druck  $p_c$  ist also  $p_c = \frac{Nk_B T_C}{V_A} = \frac{Nk_B T_A}{V_A} \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{2/3}$

Der Prozess im  $pV$ -Diagramm



$p \propto \frac{1}{V}$ ; irreversibler Prozess, keine durchgezogene Linie!

15)b) in  $A \rightarrow B$  und  $B \rightarrow C$  ist  $\Delta Q = 0$

nur in  $C \rightarrow A$  gibt es einen Wärmefluss zwischen System und Wärmebad  
Gleichzeitig ist in  $C \rightarrow A$   $dV_{CA} = 0$

$$\rightarrow \delta Q_{CA} = dE_{CA} = \frac{3}{2} Nk_B dT$$

$$\Leftrightarrow \Delta Q_{CA} = \frac{3}{2} Nk_B \int_{T_C}^{T_A} dT = \frac{3}{2} Nk_B (T_A - T_C)$$

$< 0$  da  $T_C > T_A$

es folgt  $\Delta Q = \Delta Q_{AB} + \Delta Q_{BC} + \Delta Q_{CA}$

$$= \frac{3}{2} Nk_B T_A \left[ 1 - \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{2/3} \right] < 0 //$$

da  $T_C = T_A \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{2/3}$



15|c)  $A \rightarrow B$  ist ein irreversibler Prozess welcher von einem Gleichgewichtszustand in einen anderen führt. Der neue Gleichgewichtszustand hat nun aber eine höhere Entropie da das Volumen größer geworden ist (höhere Anzahl an möglichen Konfigurationen für das Gas). In solchen irreversiblen Prozessen ist der Zuwachs an Entropie nicht auf einen Wärmeaustausch  $\delta Q$  zurück zu führen (wie das in reversiblen Prozessen der Fall ist). Da Entropie eine Zustandsfunktion ist, ist die Änderung der Entropie unabhängig vom spezifischen Prozess zwischen zwei Gleichgewichtszuständen  $A \rightarrow B$  in unseren Fall.

$\Rightarrow$  statt einem irreversiblen Prozess können wir uns reversiblen Prozess definieren welcher das <sup>Gas</sup> isotherm von  $V_A$  auf  $V_B$  expandieren lässt! dafür entfernen wir die thermisch Isolierung und haben

$$dE = \delta Q + \delta W$$

$\uparrow = 0$  da isotherm

$$\Rightarrow \delta Q = -\delta W = p dV$$

da für reversible Prozesse  $dS = \frac{\delta Q}{T}$  gilt, folgt

$$dS = \frac{p}{T} dV = N k_B \frac{1}{V} dV$$

$$\Leftrightarrow \Delta S_{AB} = N k_B \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) > 0 //$$

$B \rightarrow C$  ist reversibel also  $dS = \frac{\delta Q_{BC}}{T} = 0$

$$\Leftrightarrow \Delta S_{BC} = 0 //$$

$C \rightarrow B$ : reversibel, also  $dS_{CB} = \frac{\delta Q_{CB}}{T} = \frac{3}{2} N k_B \frac{1}{T} dT$

$$\Rightarrow \Delta S_{CB} = \frac{3}{2} N k_B \ln\left(\frac{T_C}{T_A}\right) = \frac{3}{2} N k_B \ln\left(\left|\frac{V_B}{V_A}\right|^{2/3}\right)$$

$$= N k_B \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = -\Delta S_{AB} //$$

$$\Rightarrow \Delta S = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CA} = 0 //$$



# 1b) GALAKTISCHES ZENTRUM

$$H(\vec{q}, \vec{p}) = -\frac{GMm}{q} + \frac{p^2}{2m} \quad \text{mit } q = |\vec{q}|, p = |\vec{p}|$$

Für umlaufende Stern:  $H(\vec{q}, \vec{p}) < 0$

a) z.z.:  $\Omega^{2D}(E) = \frac{1}{h^2} \int d^2q \int d^2p \delta(H(\vec{q}, \vec{p}) - E) = 2m \left( \frac{\pi GMm}{-E} \right)^2$

Einheit von  $\Omega^{2D}$ :

$$\Omega^{2D}(E) = \frac{1}{h^2} \int_0^\infty 2\pi q dq \int_0^\infty 2\pi p dp \delta\left(-\frac{GMm}{q} + \frac{p^2}{2m} - E\right)$$

Formelsammlung:  $\int dx f(x) \delta(g(x)) = \sum_{x_0: g(x_0)=0} \frac{f(x_0)}{|g'(x_0)|}$

*Siehe Definitionsbereich Integral*

$$f(p) = p, \quad g(p) = -\frac{GMm}{q} + \frac{p^2}{2m} - E \quad (=0 \Rightarrow p_0 = +\sqrt{2m(E + \frac{GMm}{q})})$$

$$\Rightarrow f(p_0) = \sqrt{2m(E + \frac{GMm}{q})}, \quad g'(p_0) = \frac{\sqrt{2m(E + \frac{GMm}{q})}}{m}$$

$$\Omega^{2D}(E) = \frac{1}{h^2} \cdot 4\pi^2 \int_0^\infty dq q \left( \sqrt{2m(E + \frac{GMm}{q})} \cdot \frac{m}{\sqrt{2m(E + \frac{GMm}{q})}} \right)$$

$$= \frac{4\pi^2 m}{h^2} \int_0^\infty dq q$$

Gesamtenergie  $E$  muss energetischen  
Obergrenze bleiben  $E = -\frac{GMm}{q} > 0$   
 $\Rightarrow q = -\frac{GMm}{E} > 0$

$$= \frac{4\pi^2 m}{h^2} \int_0^\infty dq q \Theta\left(q + \frac{GMm}{E}\right)$$

$$= \frac{4\pi^2 m}{h^2} \frac{1}{2} \left(-\frac{GMm}{E}\right)^2$$

$$= 2m \left( \frac{\pi GMm}{-Eh} \right)^2$$

Einheit:  $[\Omega^{2D}] = [m] \left( \frac{[G][M][m]}{[E][h]} \right)^2$

mit  $[G] = m^3 kg^{-1} s^{-2}$   
 $[E] = kg m^2 s^{-2}$   
 $[h] = kg m^2 s^{-1}$

$$= \frac{m^6 kg^2 kg^2 s^4 s^2}{kg^2 s^4 kg^2 m^4 kg^2 m^4 s^2}$$

$$= \frac{1}{kg m^2 s^{-2}} = \underline{\underline{J^{-1}}}$$

$$b) \text{ z.z. } \Omega^{30}(E) = \frac{1}{h^3} \int dq^3 \int dp^3 \delta(H(\vec{q}, \vec{p}) - E) = m \sqrt{2mE} \left( \frac{\pi G M m}{-E} \right)^3$$

$$\Omega^{30}(E) = \frac{16\pi^2}{h^3} \int_0^\infty q^2 dq \int_0^\infty p^2 dp \delta\left(-\frac{GMm}{q} + \frac{p^2}{2m} - E\right)$$

$$= \frac{16\pi^2 m}{h^3} \int_0^\infty dq q^2 \sqrt{2m\left(E + \frac{GMm}{q}\right)}$$

$$= \frac{16\pi^2 m}{h^3} \sqrt{2mE} \int_0^\infty dq q^2 q^{-1/2} \sqrt{-q - GMm/E}$$

$$= \frac{16\pi^2 m}{h^3} \sqrt{-2mE} \int_0^{-\frac{GMm}{E}} dq q^{3/2} \sqrt{-q - GMm/E}$$

$$\vdots \quad \text{Mathematica:} \quad = \left(-\frac{GMm}{E}\right)^3 \frac{\pi}{16}$$

$$= \underline{\underline{m \sqrt{-2mE} \left(\frac{\pi G M m}{-E h}\right)^3}}$$

$$c) f(E) \propto \Omega^{30}(E) ; \text{ z.z. } \langle T \rangle = -3 E_{\max}$$

Virialtheorem für Potentiale vom Grad  $n = -1$ :  $\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle V \rangle$

$$\Rightarrow \langle E_{\text{ges}} \rangle = \langle E \rangle = \langle T \rangle + \langle V \rangle = \langle T \rangle - 2\langle T \rangle = -\langle T \rangle$$

Für den Erwartungswert bei bekannter Wahrscheinlichkeitsdichte ergibt sich:

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= -\langle E \rangle = -\frac{\int_{-\infty}^{E_{\max}} dE E \cdot \Omega^{30}(E)}{\int_{-\infty}^{E_{\max}} dE \Omega^{30}(E)} \\ &= -\frac{\int_{-\infty}^{E_{\max}} dE \cdot E \cdot (-E)^{-5/2}}{\int_{-\infty}^{E_{\max}} dE (-E)^{-5/2}} \\ &= -\frac{-2 [E^{-1/2}]_{-\infty}^{E_{\max}}}{-\frac{2}{3} [E^{-3/2}]_{-\infty}^{E_{\max}}} \\ &= \underline{\underline{-3 E_{\max}}} \end{aligned}$$