13 Zustandsgleichungen (Testbeispiel 2021, 24 Punkte)

(a) Geben Sie die natürlichen Variablen der thermodynamischen Potentiale E, F, H und G an. Geben Sie alle Legendre Transformationen an, die Paare dieser Potentiale ineinander überführen. Die Transformation zwischen E und F lautet etwa: $F = E - ST$ mit S sodass $(\partial E/\partial S)_{V.N} = T$. (6P)

(b) Kalorische und thermische Zustandsgleichung eines Stoffes seien jeweils gegeben durch

$$E = \theta \frac{N^3 (k_\mathrm{B} T)^2}{V^2}, \qquad p = \frac{2E}{V}$$

mit der Konstante θ. Finden Sie die adiabatische Kompressibilität $\kappa_S = -(\partial V/\partial p)_{S,N}/V$ des Stoffes als Funktion von T, V und N und geben Sie deren Vorzeichen an. (6P)

14 Teilchen im homogenen Gravitationsfeld (Testbeispiel 2021, 28 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich im homogenen Schwerefeld der Erde. Es ist begrenzt durch eine nach oben offene Box B mit ebener Grundfläche A bei $q_z = 0$. Die Hamiltonfunktion des Teilchens ist

$$H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = mgq_z + \frac{p^2}{2m} \qquad \text{mit } p = |\boldsymbol{p}|.$$

(a) Zeigen Sie, dass sich für die mikrokanonische Zustandssumme $\Omega(E, A, N = 1)$ für ein Teilchen der Energie E das folgende Ergebnis ergibt: (6P)

$$\Omega(E, A, N = 1) = \frac{1}{h^3} \int_B d^3q \int d^3p \, \delta\left(H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) - E\right) = \frac{4\pi A \sqrt{(2E)^3 m}}{3gh^3}.$$

(b) Zeigen Sie allgemein, dass die mikrokanonische Zustandssumme zweier ununterscheidbaren Teilchen ohne Wechselwirkung

$$\Omega(E, A, N = 2) = \frac{1}{2!h^6} \int_B d^3q_1 \int_B d^3q_2 \int d^3p_1 \int d^3p_2 \, \delta\left(H(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{p}_1) + H(\boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{p}_2) - E\right)$$

durch eine Faltung der Einteilchenzustandssumme $\Omega(E, A, 1)$ berechnet werden kann: (3P)

$$\Omega(E, A, N = 2) = \frac{1}{2} \int_0^E dE_1 \, \Omega(E_1, A, 1) \, \Omega(E - E_1, A, 1).$$

(c) Die Faltung ergibt $\Omega(E, A, N = 2) = \pi^3 A^2 E^4 m / 6g^2 h^6$. Geben Sie die Entropie des Zweiteilchensystems $S(E, A, N = 2)$ als Funktion von E und A an und berechnen Sie damit die Wärmekapazität bei konstanter Grundfläche C_A. (5P)

15 Kreisprozesse (Testbeispiel 2021, 28 Punkte)

N Teilchen eines idealen Gases bei Temperatur T_A befinden sich im Volumen V_A. Das Gas durchläuft 3 Prozesse wie folgt:

1. $A \to B$: thermisch isoliert expandiert das Gas plötzlich von V_A auf $V_B > V_A$ durch Entfernen einer Trennwand zu Vakuum.
2. $B \to C$: das Gas bleibt thermisch isoliert und wird adiabatisch reversibel wieder auf das Volumen V_A komprimiert.
3. $C \to A$: das Gas wird mit einem Wärmebad in Kontakt gebracht und isochor reversibel auf die Anfangstemperatur T_A abgekühlt.

Beantworten Sie folgende Fragen:

(a) Skizzieren Sie den Prozess im pV-Diagramm und finden Sie T_B, T_C, sowie p_A, p_B und p_C jeweils als Funktion von T_A, V_A, V_B. (6P)

(b) Berechnen Sie die insgesamt zu- oder abgeführte Wärme ΔQ. Welches Vorzeichen hat ΔQ? (3P)

(c) Bestimmen Sie ΔS_1, ΔS_2, ΔS_3 für jeden Prozessschritt. Argumentieren Sie explizit mit Hilfe des zweiten Hauptsatzes, ob der Prozess $A \to B$ reversibel oder irreversibel ist. (5P)

16 Phasenraum des Galaktischen Zentrums

Wir betrachten den zentralen Bereich einer Galaxie, wo Sterne der Masse m das sehr viel schwerere, im Ursprung befindliche galaktische Zentrum der Masse M umkreisen. Wir nehmen an, dass alle Sterne gleiche Masse haben. Die Hamiltonfunktion eines Sternes ist

$$H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = -\frac{GMm}{q} + \frac{p^2}{2m} \qquad \text{mit } q = |\boldsymbol{q}|, p = |\boldsymbol{p}|.$$

Für umlaufende Sterne ist $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) < 0$.

(a) Die Sterne bewegen sich in einer Ebene aber ohne bestimmten Umlaufsinn. Zeigen Sie, dass die Fläche der infinitesimalen Energieschale von umlaufenden Sternen mit Energie E gegeben ist durch

$$\phi^{2\mathrm{D}}(E) = \int d^2q \int d^2p\, \delta\left(H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) - E\right) = 2m \left(\frac{\pi GMm}{-E}\right)^2.$$

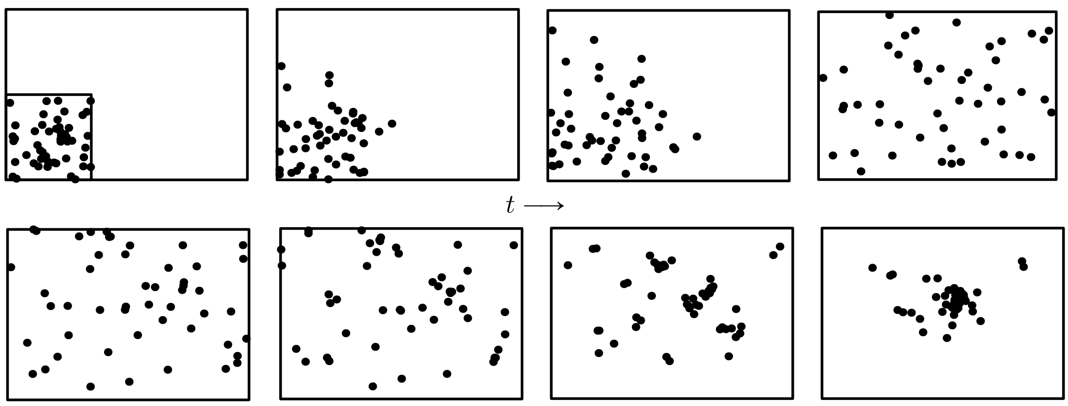
Welche Einheit hat $\phi^{2\mathrm{D}}(E)$?
Hinweis: Integrieren Sie zuerst die Impulskoordinaten, dann die Ortskoordinaten.

(b) Die Sterne bewegen sich nun im ganzen Raum. Zeigen Sie, dass die Fläche der Energieschale dann gegeben ist durch:

$$\phi^{3\mathrm{D}}(E) = \int d^3q \int d^3p\, \delta\left(H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) - E\right) = m\sqrt{-2mE} \left(\frac{\pi GMm}{-E}\right)^3.$$

(c) Angenommen, die Wahrscheinlichkeitsdichte einen Stern mit Energie E zu finden sei proportional zur Fläche der Energieschale $\phi^{3\mathrm{D}}(E)$. Zeigen Sie, dass sich daraus ein Zusammenhang zwischen dem Erwartungswert der kinetischen Energie und der maximal auftretenden Gesamtenergie ergibt: $\langle T \rangle = -3E_{\max}$.
Hinweis: Verwenden Sie das Virialtheorem.

(*d) Die obere Reihe der Skizze zeigt die Evolution von Wasserstoff in einem Labor, das am Anfang in einem Behälter war. Die untere Reihe zeigt die Evolution von Wasserstoff auf galaktischer Längenskala, das zu Sternen und Galaxien klumpt.



In Galaxien scheint der 2. Hauptsatz der Thermodynamik verletzt, da die Materie klumpt und damit die Entropie zu sinken scheint. Erkläre, warum das nicht der Fall ist. Wo ist die Entropie? In beiden fällen ist Gravitation vorhanden. Strahlung und schwarze Löcher spielen keine wesentliche Rolle.

Formelsammlung:

$$N! \approx N^N e^{-N}$$

$$\int dx\, f(x)\, \delta(g(x)) = \sum_{x_0 : g(x_0)=0} \frac{f(x_0)}{|g'(x_0)|}$$

$$\int d\xi_1 \ldots d\xi_n\, \delta\left(c_1 \xi_1^2 + \ldots + c_n \xi_n^2 - z\right) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{\pi^n}{c_1 \ldots c_n}\right)^{1/2} z^{\frac{n}{2}-1} \quad \text{mit } c_i > 0, z > 0$$

$$S(T,V,N) = k_\mathrm{B} N \left\{ \ln\left[\frac{V}{N}\left(\frac{2\pi m k_\mathrm{B} T}{h^2}\right)^{3/2}\right] + \frac{5}{2} \right\}$$

Eigenschaften des idealen Gases (Testbeispiel 2018)

Die freie Energie des idealen Gases ist gegeben durch

$$F(T,V,N) = -k_{\mathrm{B}}T\log\left(\frac{V^N (cT)^{3N/2}}{N!}\right),$$

wobei c eine (unwichtige) Konstante ist.

(a) Zeigen Sie, dass es sich bei der freien Energie im Grenzfall großer Teilchenzahlen N um eine extensive Größe handelt.

(b) Berechnen Sie die Entropie $S(T,V,N)$ als Funktion von T,V,N.

(c) Berechnen Sie die kalorische Zustandsgleichung und zeigen Sie, dass $E(T,V,N)$ nicht vom Volumen V abhängt. Wie kann man dieses Resultat physikalisch erklären.

(d) In einem reversiblen Prozess werden $X = pV^2$ und die Teilchenzahl N konstant gehalten. Berechnen Sie die zugehörige Wärmekapazität $C_X = (\partial Q/\partial T)_{X,N}$.

Ideales Gas in harmonischer Falle (Testbeispiel 2018)

Ein ideales Gas aus N Teilchen der Masse m sei in einer dreidimensionalen harmonischen Falle mit Kreisfrequenz ω gefangen.

(a) Wie lautet die zugehörige Hamiltonfunktion?

(b) Bestimmen Sie die mikrokanonische Zustandssumme über die infinitesimal dünne Energieschale

$$\Omega = \frac{1}{N!h^{3N}}\int d^{3N}q\int d^{3N}p\,\delta\left(H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})-E\right).$$

(c) In einem reversiblen Prozess werde die Kreisfrequenz der harmonischen Falle von ω auf $\omega' = \omega/2$ reduziert, während die innere Energie und die Teilchenzahl konstant bleiben. Berechnen Sie die Entropiedifferenz ΔS zwischen Anfangs- und Endzustand.

Isolierte Teilsysteme (Testbeispiel 2018)

Eine thermisch isolierte **zwei**dimensionale Box mit idealem Gas werde durch eine unbewegliche Trennwand in zwei Teilsysteme mit gleicher Teilchensorte, gleicher Energie E und gleicher Teilchenzahl N, aber unterschiedlicher Flächen A_1 und A_2 geteilt. Die Trennwand sei wärme**un**durchlässig, weshalb die Teilsysteme nicht in thermischen Kontakt stehen.

(a) Betrachten Sie zunächst nur das erste Teilsystem und berechnen Sie dessen mikrokanonische Zustandssumme $\Omega(E,A_1,N)$.

(b) Berechnen Sie für das erste Teilsystem die Entropie $S(T,A_1,N)$ für sehr große Teilchenzahlen N.

(c) Nun werde die Trennwand entfernt und ein neuer Gleichgewichtszustand stellt sich ein. Zeigen Sie, dass die daraus resultierende Entropieänderung des Gesamtsystems gegeben ist durch

$$\Delta S = 2Nk_{\mathrm{B}}\log\left(\frac{\overline{A}_{\mathrm{a}}}{\overline{A}_{\mathrm{g}}}\right),$$

wobei $\overline{A}_{\mathrm{a}} = (A_1+A_2)/2$ das arithmetische Mittel und $\overline{A}_{\mathrm{g}} = (A_1A_2)^{1/2}$ das geometrische Mittel der beiden Flächen bezeichnet. Unter welcher Bedingung handelt es sich um einen reversiblen Prozess?