1 Hauptsätze der Thermodynamik (22 Punkte)

(a) Schreiben den ersten Hauptsatz der Thermodynamik als Bilanzgleichung von Wärme und Arbeit. (3P)

(b) Geben Sie den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik als Ungleichung an. (4P)

(c) Folgern Sie aus den ersten beiden Hauptsätzen die differentielle Form der Fundamentalgleichung der Thermodynamik. (3P)

(d) Leiten Sie die differentielle Form der freien Energie F mithilfe der Legendre Transformation her. (4P)

(e) Zeigen Sie mithilfe obiger Relationen folgende Verbindung zwischen kalorischer und thermischer Zustandsgleichung: (8P)

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{T,N} = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{V,N} - p.$$

2 Reversible und irreversible Prozesse (30 Punkte)

Ein Behälter mit Volumen V_0 enthält N Teilchen eines idealen Gases bei der Anfangstemperatur T_0. Das Volumen des Behälters wird auf ein Volumen $V_1 > V_0$ auf eine der folgenden Arten geändert:

1. Der Behälter wird adiabatisch reversibel expandiert. (13P)
2. Der Behälter wird thermisch isoliert durch plötzliches Entfernen einer Trennwand expandiert. (9P)
3. Der Behälter wird isobar reversibel expandiert. (8P)

Beantworten Sie folgende Fragen:

(a) Finden Sie die Temperaturen T_1 nach der Expansion für die drei Fälle, jeweils als Funktion von T_0, V_0, V_1, N und skizzieren Sie die Vorgänge im pV- und im TS-Diagramm und beschriften Sie Anfangs- und Endpunkte.

(b) Finden Sie die innere Energie E_1 nach der Expansion für die drei Fälle.

(c) Berechnen Sie die Entropieänderung ΔS nach der Expansion für die drei Fälle und begründen Sie im 2. Fall, ob es sich um einen reversiblen oder irreversiblen Prozess handelt.

3 Diskretes ideales Gas (24 Punkte)

N Kugeln befinden sich auf V Feldern. Auf jedem Feld kann sich höchstens eine Kugel befinden. Die Anzahl an Möglichkeiten N Kugeln auf V Felder zu verteilen ist $\Omega(V,N) = \binom{V}{N}$. Wir vernachlässigen hier in Ω die Abhängigkeit von E, nehmen aber trotzdem eine wohldefinierte Temperatur T an.

(a) Die freie Energie sei durch $F = -TS$ definiert. Zeigen Sie für $V \gg N \gg 1$, dass (8P)

$$F(T,V,N) = -k_\mathrm{B}TN(\ln V - \ln N + 1) + \mathcal{O}(N^2V^{-1}).$$

(b) Zeigen Sie, dass die isotherme Kompressibilität gegeben ist durch: (6P)

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T,N} = \frac{V}{Nk_\mathrm{B}T}.$$

(c) Finden Sie die isochore und isobare Wärmekapazität, C_V und C_p. (10P)

4 Ultrarelativistisches ideales Gas (24 Punkte)

Die Hamiltonfunktion eines idealen relativistischen Punktteilchens mit Ruhemasse m ist

$$H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} \qquad \text{mit } p = |\boldsymbol{p}|.$$

(a) Schreiben Sie die mikrokanonische Zustandssumme $\Omega(E,V,N=1)$ eines Teilchens auf einer infinitesimalen Energieschale E an. (3P)

(b) Zeigen Sie damit, dass $\Omega(E,V,N=1)$ für ein relativistisches Teilchen der Energie $E \geq mc^2$ gegeben ist durch: (8P)

$$\Omega(E,V,N=1) = \frac{4\pi VE\sqrt{E^2-(mc^2)^2}}{c^3h^3}.$$

(c) Für N ununterscheidbare Teilchen ergibt sich daraus für das Phasenraumvolumen im ultrarelativistischen Fall $E \gg Nmc^2$:

$$\Phi(E,V,N) = \frac{1}{N!(3N)!}\left(\frac{8\pi VE^3}{c^3h^3}\right)^N.$$

Verwenden Sie $\Phi(E,V,N)$ für die Entropie und berechnen Sie damit die kalorische und die thermische Zustandsgleichung eines ultrarelativistischen idealen Gases. (13P)

Formelsammlung:

$$\ln(n!) = n\ln n - n + \mathcal{O}(\ln n) \qquad \text{(Stirling Formel)}$$

$$\int dx\, f(x)\,\delta(g(x)) = \sum_n \frac{f(x_n)}{|g'(x_n)|} \quad \text{mit } g(x_n) = 0 \qquad \text{(Auswertung des Dirac Delta)}$$

$$S(T,V,N) = k_\mathrm{B}N\left\{\ln\left[\frac{V}{N}\left(\frac{2\pi mk_\mathrm{B}T}{h^2}\right)^{3/2}\right] + \frac{5}{2}\right\}$$

(Sackur–Tetrode Gleichung des idealen Gases)