

K1) "Messung des Drehimpuls"

a) $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (|l, l\rangle + 2i|l, l-1\rangle + |l, l-2\rangle)$

- $|\psi\rangle$ ist ein Eigenzustand von L^2 mit dem Eigenwert $\hbar^2 l(l+1)$
Dieser ist auch der einzige mögliche Messwert von L^2

- Mögliche Messwerte für L_z sind $\hbar m$ mit $m = l, l-1, l-2$ ✓

b) • $\langle \psi | L^2 | \psi \rangle = \hbar^2 l(l+1) \langle \psi | \psi \rangle = \hbar^2 l(l+1)$ (natürlich!)

• $\langle \psi | L_z | \psi \rangle = \frac{1}{6} (\langle l, l | - 2i \langle l, l-1 | + \langle l, l-2 |) L_z (|l, l\rangle + 2i|l, l-1\rangle + |l, l-2\rangle)$
 $= \frac{1}{6} \hbar l + \frac{2}{3} \hbar(l-1) + \frac{1}{6} \hbar(l-2) = \frac{\hbar l + 4\hbar(l-1) + \hbar(l-2)}{6}$
 $= \frac{6\hbar l - 6}{6} = \hbar(l-1)$ ✓

c)

• $\Delta L^2 = \langle \psi | (L^2)^2 | \psi \rangle - (\langle \psi | L^2 | \psi \rangle)^2 = 0$ $|\psi\rangle$ ist Eigenzustand!

f $\langle \psi | L^2 \cdot L^2 | \psi \rangle = \langle \psi | L^2 \hbar^2 l(l+1) | \psi \rangle = \hbar^4 l^2 (l+1)^2$

$(\langle \psi | L^2 | \psi \rangle)^2 = \hbar^4 l^2 (l+1)^2$

• $\Delta L_z = \left\{ \begin{aligned} \langle \psi | L_z^2 | \psi \rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} \langle \psi | L_z (\hbar l |l, l\rangle + 2i \hbar(l-1) |l, l-1\rangle + \hbar(l-2) |l, l-2\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \langle \psi | [(\hbar l)^2 |l, l\rangle + 2i \hbar^2 (l-1)^2 |l, l-1\rangle + \hbar^2 (l-2)^2 |l, l-2\rangle] \\ &= \frac{1}{6} (\hbar l)^2 + \frac{2}{3} \hbar^2 (l-1)^2 + \frac{1}{6} \hbar^2 (l-2)^2 \\ (\langle \psi | L_z | \psi \rangle)^2 &= \hbar^2 (l-1)^2 \end{aligned} \right.$

$\Rightarrow \Delta L_z = \frac{1}{6} (\hbar l)^2 - \frac{1}{3} \hbar^2 (l-1)^2 + \frac{1}{6} \hbar^2 (l-2)^2 = \frac{1}{3} \hbar^2$ ✓

K2. "Zeitunabhängige Störungstheorie"

a)

$$H = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2}_{H_0} + \underbrace{\lambda x^3}_{H_1};$$

wobei $H_0 |m\rangle = E_m^{(0)} |m\rangle$ mit $E_n^{(0)} = \hbar \omega (n + \frac{1}{2})$

und der Operator $x = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} (a + a^\dagger)$ mit $\begin{cases} a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \\ a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \end{cases}$

Die Matrix-Elemente des x^3 Operators in der Eigenbasis von H_0 sind folgende:

$$\langle m | X^3 | m \rangle = \frac{1}{(2\alpha)^{3/2}} \langle m | (a + a^\dagger) \cdot (a + a^\dagger) \cdot (a + a^\dagger) | m \rangle$$

$$= \frac{1}{(2\alpha)^{3/2}} \langle m | (a^2 + a^{\dagger 2} + \underbrace{aa^\dagger}_{N+1} + \underbrace{a^\dagger a}_N) \cdot (a + a^\dagger) | m \rangle$$

$$= \frac{1}{(2\alpha)^{3/2}} \langle m | a^3 + a^{\dagger 3} + a^2 a^\dagger + a^{\dagger 2} a + (N+1)a + (N+1)a^\dagger + N a + N a^\dagger | m \rangle$$

$aaa^\dagger = a a^\dagger a + a \leftarrow \begin{matrix} \hookrightarrow a^\dagger a^\dagger = a^\dagger a a^\dagger - a^\dagger = N a^\dagger - a^\dagger \\ = (N+1)a + a \end{matrix}$

$$= \frac{1}{(2\alpha)^{3/2}} \langle m | a^3 + a^{\dagger 3} + 3(N+1)a + 3N a^\dagger | m \rangle$$

Wir haben 4 Beiträge $\langle m | X^3 | m \rangle =$

$$\begin{cases} \bullet m = m-3 \Rightarrow \frac{1}{(2\alpha)^{3/2}} \sqrt{n(n-1)(n-2)} \\ \bullet m = m+3 \Rightarrow \frac{1}{(2\alpha)^{3/2}} \sqrt{(n+3)(n+2)(n+1)} \\ \bullet m = m-1 \Rightarrow \frac{3}{(2\alpha)^{3/2}} n^{3/2} \\ \bullet m = m+1 \Rightarrow \frac{3}{(2\alpha)^{3/2}} (n+1)^{3/2} \end{cases}$$

Alle Beiträge sind ausserdiagonal in (m, n) , deswegen ist die erste Ordnung der Störungstheorie genau null!

$$E_m^{(1)} = \langle m | \lambda X^3 | m \rangle = 0$$

b) In zweiter Ordnung hat man

$$E_m^{(2)} = \lambda^2 \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m | X^3 | n \rangle|^2}{E_m^0 - E_n^0} =$$

$$= \lambda^2 \left[\frac{|\langle m-3 | X^3 | m \rangle|^2}{\hbar\omega(m+\frac{1}{2}) - \hbar\omega(m-3+\frac{1}{2})} + \frac{|\langle m+3 | X^3 | m \rangle|^2}{\hbar\omega(m+\frac{1}{2}) - \hbar\omega(m+3+\frac{1}{2})} + \right. \\ \left. + \frac{|\langle m-1 | X^3 | m \rangle|^2}{\hbar\omega(m+\frac{1}{2}) - \hbar\omega(m-1+\frac{1}{2})} + \frac{|\langle m+1 | X^3 | m \rangle|^2}{\hbar\omega(m+\frac{1}{2}) - \hbar\omega(m+1+\frac{1}{2})} \right] =$$

$$= \frac{\lambda^2}{(2d)^3} \left[\frac{n(n-1)(n-2)}{3\hbar\omega} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{-3\hbar\omega} + \right. \\ \left. + \frac{9n^3}{\hbar\omega} + \frac{9(n+1)^3}{-\hbar\omega} \right] =$$

$$= \frac{\lambda^2}{(2d)^3 \hbar\omega} \left[-3m^2 - 3n - 2 - 27m^2 - 27m - 9 \right] = \frac{\lambda^2}{(2d)^3 \hbar\omega} \left[-30m^2 - 30m - 11 \right]$$

$$= \frac{\lambda^2}{(2d)^3 \hbar\omega} (-30) \left[m^2 + m + \frac{11}{30} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right] = \boxed{-\frac{\lambda^2}{d^2 \hbar\omega} \frac{15}{4} \left(m + \frac{1}{2}\right) - \frac{\lambda^2}{d^2 \hbar\omega} \frac{7}{16}}$$

3 "Ritzisches Variationsverfahren"

a)

- Erster Schritt: Normierung der Versuchswellenfunktion

$$N^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_0^*(x) \phi_0(x) dx = N^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\gamma x^2} dx = N^2 \sqrt{\frac{\pi}{2\gamma}} = 1$$

$$\Rightarrow N^2 = \sqrt{\frac{2\gamma}{\pi}} \quad \text{und die Normierte-Wellenfunktion } \tilde{\phi}_0(x) = \left(\frac{2\gamma}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\gamma x^2}$$

- Zweiter Schritt: Rechnung der Energie

$$E_0(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \tilde{\phi}_0^*(x) [H_0 + H_1] \tilde{\phi}_0(x) =$$

$$= N^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\gamma x^2} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \lambda x^3 \right] e^{-\gamma x^2}$$

gerade Funkt.

Nichtige Bemerkung: das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \tilde{\phi}_0^*(x) H_1 \tilde{\phi}_0(x) = N^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\gamma x^2} x^3 dx = 0$

deswegen $E_0(\gamma) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx \tilde{\phi}_0^*(x) H_0 \tilde{\phi}_0(x)$ - Außerdem hat $\tilde{\phi}_0(x)$

- die gleiche funktionale Form wie die Wellenfunktion des Grundzustands von H_0 ($\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar} x^2}$).

Deswegen kann man sicher sein, OHNE weitere Rechnungen, dass

$$\text{min}_\gamma E_0(\gamma) = \frac{\hbar\omega}{2} \quad \text{für } \gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right) \quad \checkmark$$

Natürlich kann man dieses Ergebnis auch bekommen mit den standard Rechnungen und zwar:

$$E_0(\gamma) = N^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-2\gamma x^2} \left[\frac{\hbar^2 \gamma}{m} \left(1 + \left(\frac{1}{2} \frac{m^2 \omega^2}{\gamma \hbar^2} - 2\gamma \right) x^2 \right) \right] =$$

$$= \frac{\hbar^2 \gamma}{m} + \frac{1}{4\gamma} \frac{\hbar^2 \gamma}{m} \left(\frac{1}{2} \frac{m\omega^2}{\hbar^2 \gamma} - 2\gamma \right) = \frac{\hbar^2 \gamma}{2m} + \frac{1}{8} \frac{m\omega^2}{\gamma}$$

• Dritter Schritt: Ableitung der $E_0(\gamma)$

$$\frac{dE_0(\gamma)}{d\gamma} = \frac{\hbar^2}{2m} - \frac{1}{8} \frac{m\omega^2}{\gamma^2} = 0 \quad \frac{8\gamma^2}{m\omega^2} = \frac{2m}{\hbar^2}$$

$$\Rightarrow \gamma^* = \frac{m\omega}{\hbar} \Rightarrow \gamma^* = \frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar}$$

Das heißt $\left\{ \begin{array}{l} E_0(\gamma^*) = \frac{1}{4} \hbar\omega + \frac{1}{4} \hbar\omega = \frac{1}{2} \hbar\omega = E_0 \text{ (Energie des Grundzustands von } H) \\ \tilde{\varphi}_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right) x^2} \text{ (Grundzustand von } H_0) \end{array} \right.$

b) Wie schon gesagt mit $E_0(\gamma) = E_0$ (Energie des Grundzustands von H)

Auf der anderen Seite, ist es nicht zu erwarten dass die (gerade) Versuchswellenfunktion $\varphi_0(x)$ den exakten Grundzustand von $H = H_0 + H_1$ beschreiben kann (Denn H_1 Beitrag ist ungerade). -

Deswegen, muss man erwarten dass $E_0(H_0 + H_1) < E_0(H_0) = \frac{\hbar\omega}{2}$

Bonus:

c) Der Rückschluss von b) ist auch in voller Übereinstimmung mit dem Ergebnis von Beisp. K2

Da hat man gerechnet, dass $E_n^{(1)} = 0$, $E_n^{(2)} < 0 \quad \forall n$

\Rightarrow Der Grundzustand von $H_0 + H_1$ liegt tiefer als der von H_0 !

d) Verschiedene Lösungen möglich für dieses Beispiel -

k4) "Zweite Quantisierung und Hubbard Modell"

a) Mit 1 Elektron sind die möglichen Zustände die folgenden:

3 für Spin \uparrow

$$|\uparrow, 0, 0\rangle = c_{1\uparrow}^+ |vac\rangle ; |0, \uparrow, 0\rangle = c_{2\uparrow}^+ |vac\rangle ; |0, 0, \uparrow\rangle = c_{3\uparrow}^+ |vac\rangle$$

• 3 für Spin \downarrow

$$|\downarrow, 0, 0\rangle = c_{1\downarrow}^+ |vac\rangle, \dots$$

Es ist klar, dass der zweite Beitrag des Hamilton-Operators,

$\sum_{i=1,3} U_{i\uparrow} n_{i\downarrow}$ immer null bei Anwendung auf alle diese Zustände ist.

(man hat entweder 1 el. \uparrow oder 1 el. \downarrow auf einem Platz)

Das Rest von H gibt

$$H = -t \left(\sum_{i=1,2} \overbrace{c_{i\uparrow}^+ c_{i+1\uparrow} + c_{i+1\uparrow}^+ c_{i\uparrow}}^{H_{\uparrow}} + \sum_{i=1,2} \overbrace{c_{i\downarrow}^+ c_{i+1\downarrow} + c_{i+1\downarrow}^+ c_{i\downarrow}}^{H_{\downarrow}} \right)$$

oder man in zwei Teilen (Spin \uparrow und Spin \downarrow) komplett trennen kann.

Deswegen kann man in dem Unterraum mit Spin \uparrow (ohne Spin \downarrow)

direkt arbeiten, und die korrespondierenden Matrix-Elemente

berechnen:

$$\text{z. B. } \langle \uparrow, 0, 0 | H | \uparrow, 0, 0 \rangle = 0 ; \langle 0, \uparrow, 0 | H | \uparrow, 0, 0 \rangle = -t$$

...

Diese Rechnungen geben die folgende Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -t & 0 \\ -t & 0 & -t \\ 0 & -t & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{die man diagonalisieren kann}} \det \begin{pmatrix} -\lambda & -t & 0 \\ -t & -\lambda & -t \\ 0 & -t & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 2t^2\lambda = 0$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 2t^2) = 0$$

→ Eigenwert des Grundzustand: $-\sqrt{2}t$ $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = \sqrt{2}t$; $\lambda_3 = -\sqrt{2}t$

b) $U=0 \Rightarrow$ Der Hamilton-Operator ist gleich wie in a) aber in diesem Fall haben die Zustände 3 Elektronen:

z.B., $|\uparrow, \uparrow, \downarrow\rangle = c_{1\uparrow}^+ c_{2\uparrow}^+ c_{3\downarrow}^+ |vac\rangle$ oder $|\uparrow, 0, \downarrow\rangle = c_{1\uparrow}^+ c_{2\downarrow}^+ c_{3\downarrow}^+ |vac\rangle$

Da der Hamilton-Operator trennbar für Spin \uparrow und Spin \downarrow ist, kann man alle Eigenzustände schreiben als Tensor-Produkt:

z.B.: $| \downarrow \rangle \otimes | \downarrow \rangle$ oder $Spin\uparrow \otimes Spin\downarrow$

$$H_{\uparrow} = \begin{pmatrix} 0 & -t & 0 \\ -t & 0 & -t \\ 0 & -t & 0 \end{pmatrix}; \quad H_{\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 & -t & 0 \\ -t & 0 & -t \\ 0 & -t & 0 \end{pmatrix}$$

genau wie im Fall a); die Diagonalisierung liefert wie vorher $\lambda_1=0, \lambda_2=\sqrt{2}t; \lambda_3=-\sqrt{2}t$

Die niedrigste Energie (Energie des Grundzustands) erhält man, wenn beide Energien von Spin \uparrow und Spin \downarrow Unterzonen minimal sind.

Deswegen $E_0 = -\sqrt{2}t - \sqrt{2}t = -2\sqrt{2}t$

c) $t=0 \Rightarrow$ Alle Zustände der Form $|\uparrow, \uparrow, \downarrow\rangle = c_{1\uparrow}^+ c_{2\uparrow}^+ c_{3\downarrow}^+ |vac\rangle$, $|\uparrow, 0, \downarrow\rangle = c_{1\uparrow}^+ c_{2\downarrow}^+ c_{3\downarrow}^+ |vac\rangle \dots$ sind automatisch Eigenvektoren entweder mit Eigenwert $E_0=0$ (Grundzustand) wenn es keine Doppelbesetzung gibt, oder mit $E_1=U$, wenn es 1 Doppelbesetzung gibt.

Energie des Grundzust. = 0

Eigenvektoren: Alle Zustände ohne Doppelbesetzung: $|\uparrow, \uparrow, \uparrow\rangle; |\uparrow, \uparrow, \downarrow\rangle; |\uparrow, \downarrow, \uparrow\rangle \neq |\downarrow, \uparrow, \uparrow\rangle \dots$ aber nicht $|\uparrow, 0, \downarrow\rangle$

K5) "Ein Elektron in Magnetfeld (Landau-Niveaus)"

a) $\vec{B} = (0, 0, B) = \text{rot } \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ 0 & Bx & 0 \end{vmatrix} = \hat{k} \frac{d}{dx} (Bx) = \hat{k} B = (0, 0, B)$ ✓

b) $H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 = \frac{1}{2m} \left[p_x^2 + \left(p_y + \frac{e}{c} Bx \right)^2 + p_z^2 \right] =$
 $= \frac{1}{2m} \left[p_x^2 + p_y^2 + 2 \frac{e}{c} B p_y x + \frac{e^2}{c^2} B^2 x^2 + p_z^2 \right]$

$[H, p_z] = 0$ (p_z kommutiert mit x, p_x, p_y und mit sich selbst)

$[H, p_y] = 0$ (p_y kommutiert mit x, p_x, p_z und mit sich selbst)

Deswegen, sind die y -abhängigen/ z -abhängigen Teile der Wellenfunktion $\psi(x, y, z) = f(x) g(y) h(z)$ Ebene Wellen (Eigenfunkt. von p_y, p_z)

und zwar $g(y) \propto e^{i p_y y}$; $h(z) \propto 1$ ($p_z = 0$) ✓

c) Mit diesen Ausdrücken für $g(y)$ und $h(z)$ bekommen wir

$H \psi(x, y, z) = E \psi(x, y, z) \Rightarrow \frac{1}{2m} \left[p_x^2 + \left(\frac{e}{c} Bx + p_y \right)^2 \right] f(x) g(y) = E f(x) g(y)$
 $\Rightarrow \left[\frac{p_x^2}{2m} + \frac{e^2 B^2}{2mc^2} \left(x + \frac{c p_y}{e B} \right)^2 \right] f(x) = E f(x),$

wo man auch den Vorfaktor $\frac{e^2 B^2}{2mc^2}$ umschreiben kann als $\frac{1}{2} m \omega_c^2$ (wie beim harmonischen Oszillator) mit $\omega_c = \frac{e B}{mc}$ (Zyklotron Frequenz) ✓

d) $H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_c^2 \left(x + \frac{c p_y}{e B} \right)^2$ hat $E_m = \hbar \omega_c \left(m + \frac{1}{2} \right)$ als Eigenwerte
 $x_0 \Rightarrow$ Das ist nur eine Verschiebung von x ← LANDAU LEVELS