1. Aufgabe (Wiederh. QM I : Komposition zweier Drehimpulse)

a)

Der Hamiltonian $H = \frac{L^2}{2mR^2} + \frac{2\omega}{\hbar} \vec{L}\cdot\vec{S}$ ist nicht diagonal in der Basis $|L^2, L_z, S^2, S_z\rangle$.

Es ist dann nützlich, den zweiten Term des Hamiltonians durch die Definition des Totalen Drehimpuls $\vec{J}$ umzuschreiben

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \Rightarrow J^2 = L^2 + S^2 + \underbrace{\vec{L}\cdot\vec{S} + \vec{S}\cdot\vec{L}}_{2\vec{L}\cdot\vec{S}}$$

Man hat $$H = \frac{\omega}{\hbar} J^2 + \left[\frac{1}{2mR^2} - \frac{\omega}{\hbar}\right] L^2 - \frac{\omega}{\hbar} S^2 \Rightarrow \begin{cases} [H, J^2] = 0 \\ [H, L^2] = 0 \\ [H, S^2] = 0 \end{cases}$$

Deswegen ist die Eigenbasis des Hamilton-Operators durch die Eigenvektoren des Totalen Drehimpuls $\vec{J}$ definiert

$$H|J^2, J_z, L^2, S^2\rangle = \left[\hbar\omega\, j(j+1) + \left(\frac{\hbar^2}{2mR^2} - \hbar\omega\right) l(l+1) - \hbar\omega\, s(s+1)\right] \times |J^2, J_z, L^2, S^2\rangle$$

Beobachtung: $[H, L^2] = 0$ und $[H, S^2] = 0$ (L^2 und S^2 sind "Bewegungskonstanten") - Ihre Werte werden durch den Anfangszustand definiert:

$$Y_{1,0}\chi_+ \Rightarrow \begin{cases} s = 1/2 \\ l = 1 \end{cases} \Rightarrow H|J^2, J_z, L^2, S^2\rangle = \underbrace{\left[\hbar\omega\, j(j+1) + \frac{\hbar^2}{mR^2} - \frac{11}{4}\hbar\omega\right]}_{E(j)} |J^2, J_z, L^2, S^2\rangle$$

mit $j = 3/2 = (l+s)\,,\ \frac{1}{2} = |l-s|$

b)

Der Anfangzustand ist $\psi(0) = Y_{1,0}\,\chi_\uparrow$

$\psi(0)$ ist auch Eigenzustand des Operator $J_z = L_z + S_z$ mit $m = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\qquad \left(J_z\,\psi(t) = \frac{\hbar}{2}\,\psi(t) \right)$

<u>Beobachtung:</u> $[H, J_z] = 0 \Rightarrow J_z$ ist eine "Bewegungskonstante" des Systems $\Rightarrow \psi(t)$ wird von einer Linearkombination der Eigenzustände mit $m = \frac{1}{2}$ definiert sein

$$j = \begin{cases} \frac{3}{2} & \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ \boxed{m = \frac{1}{2}} \\ m = -\frac{1}{2} \\ m = -\frac{3}{2} \end{cases} \\ \frac{1}{2} & \begin{cases} \boxed{m = \frac{1}{2}} \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$|\psi(t)\rangle = A\, e^{\frac{-i\,E(j=3/2)\,t}{\hbar}}\, |J = \tfrac{3}{2}, m = \tfrac{1}{2}\rangle + B\, e^{\frac{-i\,E(j=1/2)\,t}{\hbar}}\, |j = \tfrac{1}{2}, m = \tfrac{1}{2}\rangle$$

wobei $\begin{cases} E(j = 3/2) = \dfrac{\hbar^2}{2mR^2} + \hbar\omega \\ E(j = 1/2) = \dfrac{\hbar^2}{mR^2} - 2\hbar\omega \end{cases}$

Die Konstanten A und B werden vom Anfangszustand definiert. Der Anfangszustand ist allerdings in der Basis $\{L^2, S^2, L_z, S_z\}$ definiert, deswegen müssen wir die Eigenvektoren $|J, m\rangle$, die in $\psi(t)$ erscheinen, in diese Basis umschreiben.

<u>Aufbau</u> <u>der</u> $|J = 3/2, m = 1/2\rangle$ und $|J = 3/2, m = 1/2\rangle$ in der $\{L^2, S^2, L_z, S_z\}$ Basis

Wir können anfangen mit: $|J = 3/2, m = 3/2\rangle = |l_z = 1, S_z = 1/2\rangle$

$= Y_{1,1}\,\chi_\uparrow$

Dann können wir mit dem Operator $J_- = L_- + S_-$ den expliziten Ausdruck für $|J=3/2, m=1/2\rangle$ schreiben

$$J_- \,|J=3/2, m=3/2\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\;|J=3/2, m=1/2\rangle$$

$$(L_- + S_-)\,|J=3/2, m=3/2\rangle = \sqrt{3}\,\hbar\;|J=3/2, m=1/2\rangle$$

$$\hbar\sqrt{\ell(\ell+1)-\ell_z(\ell_z-1)}\;|\ell_z=0, s_z=1/2\rangle + \hbar\sqrt{s(s+1)-s_z(s_z-1)}\;|\ell_z=1, s_z=-1/2\rangle = \sqrt{3}\,\hbar\,|J=3/2, m=1/2\rangle$$

$$\hbar\sqrt{2}\;|\ell_z=0, s_z=1/2\rangle + \hbar\,|\ell_z=1, s_z=1/2\rangle = \sqrt{3}\,\hbar\;|J=3/2, m=1/2\rangle$$

$$|J=3/2, m=1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\;|\ell_z=0, s_z=1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\;|\ell_z=1, s_z=-1/2\rangle$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$Y_{1,0}\,\chi_+ \qquad\qquad Y_{1,1}\,\chi_-$$

Der zweite Zustand, der in $\psi(t)$ erscheint ($|J=1/2, m=1/2\rangle$), sollte orthogonal zu $|J=3/2, m=1/2\rangle$ sein [Die Beide komplett den Unterraum $J_z = 1/2$ definieren]

$$\begin{cases} |J=3/2, m=1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\;|\ell_z=0, s_z=1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\;|\ell_z=1, s_z=-1/2\rangle \\[2ex] |J=1/2, m=1/2\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}\;|\ell_z=0, s_z=1/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\;|\ell_z=1, s_z=-1/2\rangle \end{cases}$$

Deswegen läßt sich der Anfangzustand schreiben als

$$|\psi(0)\rangle = |\ell_z=0, s_z=1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\;|J=3/2, m=1/2\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}\;|J=1/2, m=1/2\rangle$$

$\Rightarrow$ Das determiniert die A, B Konstanten, als

$$A = \sqrt{2/3} \quad ; \quad B = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Die Zeitentwicklung der $\psi(t)$ ist dann folgende

$$|\psi(t)\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\; e^{-i\left[\frac{\hbar}{mR^2}+\omega\right]t}\,|J=3/2, m=1/2\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}\; e^{-i\left[\frac{\hbar}{mR^2}-2\omega\right]t}\,|J=1/2, m=1/2\rangle$$

die man auch in der alten Basis schreiben kann:

$$|\psi(t)\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\, e^{-i\left[\frac{\hbar}{mR^2}+\omega\right]t}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,|l_z=0, s_z=1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\,|l_z=1, s_z=-1/2\rangle\right)$$

$$- \sqrt{\frac{1}{3}}\, e^{-i\left[\frac{\hbar}{mR^2}-2\omega\right]t}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\,|l_z=0, s_z=1/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|l_z=1, s_z=-1/2\rangle\right) =$$

$$= \frac{e^{-i\frac{\hbar}{mR^2}t}}{3}\left[\left(2e^{-i\omega t}+e^{2i\omega t}\right)|l_z=0, s_z=1/2\rangle + \sqrt{2}\left(e^{-i\omega t}-e^{2i\omega t}\right)|l_z=1, s_z=-1/2\rangle\right]$$

c) Für die Rechnung der Wahrscheinlichkeit ist es nötig den expliziten Ausdruck der Kugelflächenfunktionen zu benutzen, d.h.:

$$\psi(t) = \frac{e^{i\hbar/mR^2\,t}}{3}\left[\left(2e^{-i\omega t}+e^{2i\omega t}\right)Y_{1,0}\,\chi_+ + \sqrt{2}\,e^{-i\omega t}\left(1-e^{3i\omega t}\right)Y_{1,1}\,\chi_-\right]$$

Die Wahrscheinlikeit das Teilchen mit $S_z=-\hbar/2$ (χ_-) und mit $0<\theta<\pi/3$ zu finden ist

$$P(0<\theta<\pi/3, \downarrow) = \frac{4}{9}\left(1-\cos 3\omega t\right)\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/3} d\theta\, \sin\theta\; Y^*_{1,1}(\theta,\phi)\, Y_{1,1}(\theta,\phi)$$

wobei $Y_{1,1}(\theta,\phi) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\, e^{i\phi}\sin\theta$

$$P(0<\theta<\pi/3, \downarrow) = \frac{\cancel{4}^{\,1}}{\cancel{9}_{\,3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}_{\,1}}\,\frac{(1-\cos 3\omega t)}{\cancel{2\pi}}\underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi}\;\underbrace{\int_0^{\pi/3} d\theta\, \sin^3\theta}_{5/24} = \frac{5}{72}\left(1-\cos 3\omega t\right)$$

2. Ausgabe (Zeitentwicklung eines Quantenzustands)

a)

Die Zeitentwicklung eines Quantenzustands ist einfach gerechnet, wenn man die Eigenwerte E_i und die Eigenvektoren $|v_i\rangle$ des Hamiltonians des Systems kennt.

$$|\psi(t)\rangle = \sum_i A_i \, e^{-i\frac{E_i t}{\hbar}} |v_i\rangle,$$ wobei die Konstanten A_i vom Anfangszustand definiert werden

In unserem Falle, ist der Hamilton Operator

$$H = \hbar\omega_1 \left(|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-| \right) + \hbar\omega_2 \left(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+| \right)$$

nicht diagonal in der Basis $\{|+\rangle, |-\rangle\}$. Deswegen müssen wir die Eigenwerte/recktoren berechnen:

- Eigenwerte: $\det(H - E\mathbb{1}) = 0 \rightarrow \det\begin{pmatrix} \hbar\omega_1 - E & \hbar\omega_2 \\ \hbar\omega_2 & \hbar\omega_1 - E \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow (\hbar\omega_1 - E)^2 - \hbar^2\omega_2^2 = 0 \rightarrow \hbar\omega_1 - E = \pm\hbar\omega_2 \rightarrow E_{A,B} = \hbar(\omega_1 \pm \omega_2)$

- Eigenvektoren: $(H - E_{A,B}\mathbb{1})|v_{A,B}\rangle = 0$

$\hookrightarrow |v_{A,B}\rangle = v_{A,B}^{(+)}|+\rangle + v_{A,B}^{(-)}|-\rangle$

wobei wir die Eigenvektoren in der $\underbrace{\{|+\rangle, |-\rangle\}}_{\text{Basis}}$ explizit geschrieben haben

$$(H - E_{A,B}\mathbb{1})|v_{A,B}\rangle = 0 \quad \begin{cases} \text{für } E_A = \hbar(\omega_1+\omega_2) \Rightarrow -\cancel{\hbar}\omega_2 v_A^{(+)} + \cancel{\hbar}\omega_2 v_A^{(-)} = 0 \quad (*) \\ v_A^{(+)} = v_A^{(-)} \Rightarrow \boxed{|v_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)} \\ \text{für } E_B = \hbar(\omega_1-\omega_2) \Rightarrow \cancel{\hbar}\omega_2 v_B^{(+)} + \cancel{\hbar}\omega_2 v_B^{(-)} = 0 \quad (*) \\ v_B^{(+)} = -v_B^{(-)} \Rightarrow \boxed{|v_B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle)} \end{cases}$$

(*) Der Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ kommt von der Normierung

$\langle v_A|v_A\rangle = 1$, $\langle v_B|v_B\rangle = 1$ - (Man kann sehr einfach überprüfen, dass die zwei Eigenvektoren ortogonalen sind : $\langle v_A|v_B\rangle = 0$)

Der Zeitentwicklung unseres Zustands wird deswegen :

$$|\psi(t)\rangle = A\, e^{-i(\omega_1+\omega_2)t}|v_A\rangle + B\, e^{-i(\omega_1-\omega_2)t}|v_B\rangle,$$

wobei wir die Konstanten A, B durch dem Anfangszustand $|\psi(t=0)\rangle = |+\rangle$ berechnen können

$$\langle +|\psi(t=0)\rangle = 1 \qquad \langle +|\, A \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)}_{=|v_A\rangle} + B \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle)}_{=|v_B\rangle} = 1$$

$$\Rightarrow \quad A/\sqrt{2} + B/\sqrt{2} = 1 \Rightarrow A = \sqrt{2} - B$$

Aber wir wissen auch dass $\langle +|-\rangle = 0$ (Definition einer Ortonormierten Basis)

deswegen wissen wir auch dass

$$\langle -|\psi(t=0)\rangle = 0 \qquad A/\sqrt{2} - B/\sqrt{2} = 0 \Rightarrow A = B$$

$$\text{Insgesamt} \begin{cases} A = \sqrt{2} - B \\ A = B \end{cases} \Rightarrow \quad 2A = \sqrt{2} \Rightarrow A = 1/\sqrt{2} = B$$

Deshalb können wir die Zeitentwicklung unseres Zustands schreiben als :

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2} e^{-i(\omega_1+\omega_2)t}\Big(|+\rangle + |-\rangle\Big) + \frac{1}{2} e^{-i(\omega_1-\omega_2)t}\Big(|+\rangle - |-\rangle\Big)$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} e^{-i\omega_1 t}\Big[\cancel{2}\cos(\omega_2 t)\,|+\rangle - \cancel{2}i \sin(\omega_2 t)\,|-\rangle\Big]$$

$$= e^{-i\omega_1 t}\Big[\cos\omega_2 t\;|+\rangle - i\sin(\omega_2 t)\,|-\rangle\Big]$$

wobei wir die Definitionen $\cos y = \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}$; $\sin y = \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}$ benutz haben.

- Mittelwerte der Energie

$$\langle E \rangle = \langle\psi(t)|\,H\,|\psi(t)\rangle$$

wobei
$$\begin{cases} |\psi(t)\rangle = e^{-i\omega_1 t}\big[\cos\omega_2 t\;|+\rangle - i\sin\omega_2 t\,|-\rangle\big] \\ \langle\psi(t)| = e^{i\omega_1 t}\big[\cos\omega_2 t\;\langle+| + i\sin\omega_2 t\;\langle-|\big] \end{cases}$$

deswegen

$$\langle E\rangle = \overbrace{e^{-i\omega_1 t}\times e^{i\omega_1 t}}^{=1}\Big[\cos^2\omega_2 t\;(\hbar\omega_1)\overbrace{\langle+|+\rangle}^{=1}\overbrace{\langle+|+\rangle}^{=1} + \sin^2\omega_2 t\,(\hbar\omega_1)\overbrace{\langle-|-\rangle}^{=1}\overbrace{\langle-|-\rangle}^{=1}$$
$$\cancel{+\, i\,\sin\omega_2 t\cos\omega_2 t\;(\hbar\omega_2)}\;\underbrace{\langle-|-\rangle}_{=1}\underbrace{\langle+|+\rangle}_{=1} \cancel{-\, i\,\sin\omega_2 t\cos\omega_2 t\;(\hbar\omega_2)}\;\underbrace{\langle+|+\rangle}_{=1}\underbrace{\langle+|+\rangle}_{=1}\Big]$$

$$\langle E\rangle = \big[\cos^2\omega_2 t + \sin^2\omega_2 t\big]\,\hbar\omega_1 = \hbar\omega_1$$

unabhängig von der Zeit
- wie man erwarten

$$\langle\psi(t)|H|\psi(t)\rangle = \langle\psi(0)|e^{iHt}He^{-iHt}|\psi(0)\rangle$$
$$= \langle\psi(0)|H|\psi(0)\rangle\ !$$

b) Unser zeitabhängiger Zustand $|\psi(t)\rangle$ läßt sich in der Matrizendarstellung schreiben als

$$\psi(t) = e^{-i\omega_1 t} \begin{pmatrix} \cos\omega_2 t \\ -i\sin\omega_2 t \end{pmatrix}$$

Der Mittelwert des Operators A ist definiert als

$$\langle A \rangle = (\psi, A\psi) = \psi_T^*(t)\, A\, \psi(t)$$

$$\nearrow 1$$

$$= \cancel{e^{i\omega_1 t}} (\cos\omega_2 t, i\sin\omega_2 t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cancel{e^{-i\omega_1 t}} \begin{pmatrix} \cos\omega_2 t \\ -i\sin\omega_2 t \end{pmatrix}$$

$$= (\cos\omega_2 t, -i\sin\omega_2 t) \begin{pmatrix} \cos\omega_2 t \\ -i\sin\omega_2 t \end{pmatrix} = \cos^2\omega_2 t - \sin^2\omega_2 t$$

$$= 1 - 2\sin^2\omega_2 t$$

Das Quadrat des Operators A

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

ist der Identitäts-Operator!

Deswegen ist 1 sein Mittelwert:

$$\langle A^2 \rangle = (\psi, \mathbb{1}\psi) = \psi_T^* \cdot \psi = 1$$

Wir können jetzt direkt die Varianz des Operators A ausrechnen

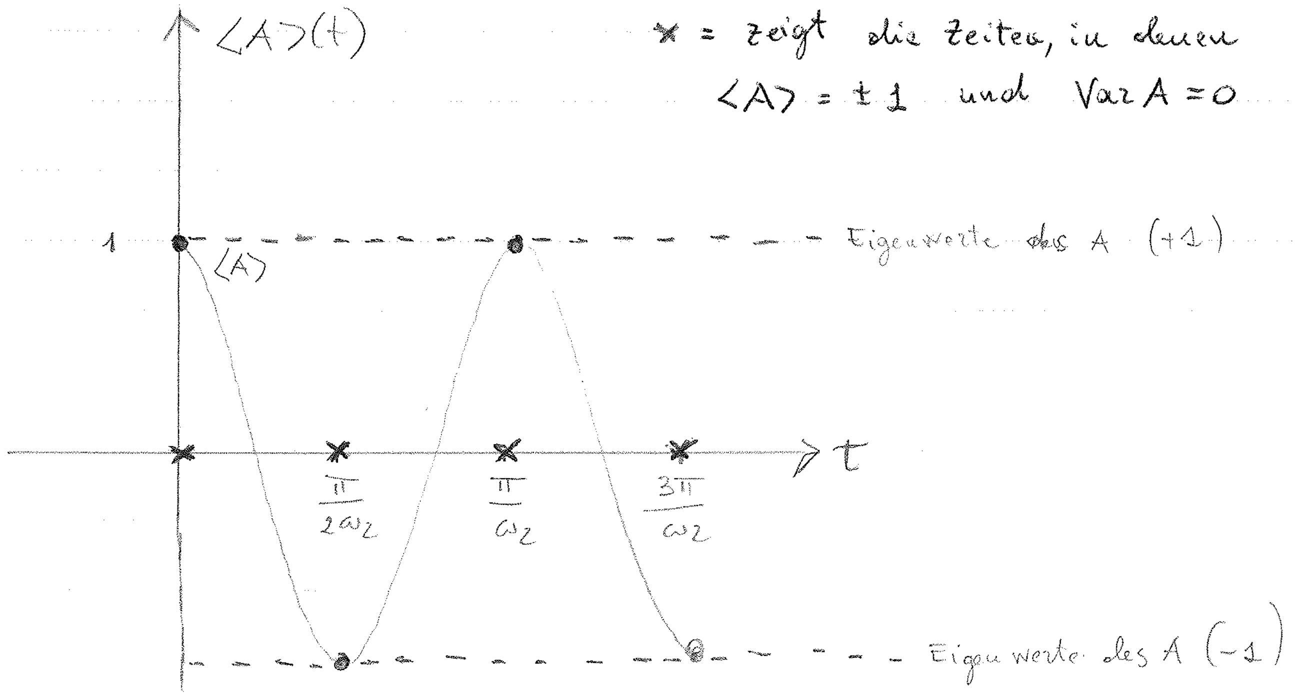
$$Var[A] = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 = 1 - (1 - 2\sin^2\omega_2 t)^2 = 4\sin^2\omega_2 t - 4\sin^4\omega_2 t$$
$$= 4\sin^2\omega_2 t\,[1 - \sin^2\omega_2 t] = 4\sin^2\omega_2 t\cos^2\omega_2 t$$

Die Varianz des A Operators (der diagonal in der $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ Basis ist) wird null, wenn $\begin{cases} \sin\omega_2 t = 0 \\ \cos\omega_2 t = 0 \end{cases}$

$$\omega_2 t = n\,\pi/2 \quad , n = 1, 2 \ldots \quad \Rightarrow \quad t = n\frac{\pi}{2\omega_2} \quad , n = 1, 2 \ldots$$

und zwar für alle Zeiten, zu denen $\psi(t)$ ein Eigenzustand des Operator A d.h. $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

$$\psi(t) = e^{-i\omega_1 t}\begin{pmatrix}\cos\omega_2 t \\ -i\sin\omega_2 t\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \text{ wenn } t = \frac{n\pi}{2\omega_2}$$



3. Aufgabe (Schrödingergleichung in der Impulsdarstellung)

Wir fangen an mit:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(p,t) = \frac{p^2}{2m} \phi(p,t) + \int \frac{dp'}{2\pi\hbar} \tilde{V}(p-p') \phi(p',t)$$

Wir betrachten den zweiten Term, in dem wir den expliziten Ausdruck der Fourier Transformation für $\tilde{V}(p-p')$ einfügen:

$$\int \frac{dp'}{2\pi\hbar} \tilde{V}(p-p') \phi(p',t) \Rightarrow \int \frac{dp'}{2\pi\hbar} \int dx \, e^{-\frac{i(p-p')x}{\hbar}} V(x) \phi(p',t)$$

Danach können wir die folgende Identität nutzen

$$e^{-ipx/\hbar} V(x) = V\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p}\right) e^{-ipx/\hbar}$$

und wir bekommen

$$\Rightarrow V\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p}\right) \int \frac{dx\,dp'}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i(p-p')x}{\hbar}} \varphi(p',t)$$

wobei $\int \frac{dx}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i(p-p')x}{\hbar}} = \delta(p-p')$ deswegen $\Rightarrow V\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\right) \varphi(p,t)$

oder insgesamt

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi(p,t) = \frac{p^2}{2m} \varphi(p,t) + V\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p}\right) \varphi(p,t)$$

$$= \left[\frac{p^2}{2m} + V\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\right)\right] \varphi(p,t)$$