4. Aufgabe

a) $|\psi(t=0)\rangle$ ist Eigenvektor des Operators A

$$A|\psi(t=0)\rangle = a\,|\psi(t=0)\rangle$$

Die Zeitentwicklung des Zustands $|\psi\rangle$ ist definiert wie

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{iHt}{\hbar}}\,|\psi(t=0)\rangle = U(t)\,|\psi(t=0)\rangle$$

und die Zeitentwicklung des Operators A in Heisenbergbild ist folgende

$$A_H(t) = U^+(t)\,A\,U(t)$$

Deswegen $A_H(-t)\,|\psi(t)\rangle = U^+(-t)\,A\,\underbrace{U(-t)\,U(t)}_{\Uparrow}\,|\psi(t=0)\rangle$

$$\Downarrow$$

$$\underset{e^{-iHt/\hbar}}{\overset{}{U^+(-t)}} = \underset{e^{-iHt/\hbar}}{U(t)}$$

$$= U(t)\,A\,|\psi(t=0)\rangle = U(t)\,a\,|\psi(t=0)\rangle$$

$$= a\,|\psi(t)\rangle$$

✓

b) Wir fangen an mit den kanonischen Bewegungsgleichungen für die Operatoren X und P in Heisenbergbild:

$$\frac{d}{dt}X_H(t) = \frac{1}{i\hbar}\left[X_H(t), H\right] \quad ; \quad \frac{d\,P_H(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[P_H(t), H\right]$$

wobei unserer Hamilton-operator der folgende ist

$$H = \frac{P^2}{2m} \qquad (V(x)=0)$$

Deswegen $$\frac{dX_H(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[X_H(t), H\right] = \frac{1}{i\hbar}\left[e^{\frac{iHt}{\hbar}} X e^{-\frac{iHt}{\hbar}} H - H e^{\frac{iHt}{\hbar}} X e^{-\frac{iHt}{\hbar}}\right]$$

$$= \frac{1}{i\hbar} e^{\frac{iHt}{\hbar}} \left[X, H\right] e^{-\frac{iHt}{\hbar}} = e^{\frac{iHt}{\hbar}}\left[X, \frac{P^2}{2m}\right] e^{-\frac{iHt}{\hbar}}$$

$$= \frac{1}{i\hbar} e^{\frac{iHt}{\hbar}} \left(X\frac{P^2}{2m} - \frac{P^2}{2m}X\right) e^{-\frac{iHt}{\hbar}} =$$

$$= \frac{e^{\frac{iHt}{\hbar}}}{i\hbar}\frac{1}{2m}\left(XP^2 - PXP + PXP - P^2X\right) e^{-\frac{iHt}{\hbar}} =$$

$$= \frac{e^{\frac{iHt}{\hbar}}}{i\hbar\, 2m}\left[(XP - PX)P + P(XP - PX)\right] e^{-\frac{iHt}{\hbar}} =$$

$$= e^{\frac{iHt}{\hbar}} \frac{2P}{2m} e^{-\frac{iHt}{\hbar}} = \frac{P_H(t)}{m}$$

Und, ähnlich,

$$\frac{dP_H(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[P_H(t), H\right] = e^{\frac{iHt}{\hbar}}\underbrace{\left[P, \frac{P^2}{2m}\right]}_{=0} e^{-\frac{iHt}{\hbar}} = 0$$

Bei $t=0$ sind das Heisenbergbild und das Schrödingerbild gleich

$$X_H(t=0) = X \quad ; \quad P_H(t=0) = P$$

und mit diesen "Anfangs Bedingungen" können wir einfach die Differentialgleichungen lösen

$$\begin{cases} X_H(t) = X_H(0) + \frac{P_H(0)}{m} t = X + \frac{P}{m} t \\ P_H(t) = P_H(0) = P \end{cases}$$

c.) In diesem Fall, ist der Hamilton-operator

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2$$

Deswegen,

$$\frac{dX_H(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} e^{\frac{iHt}{\hbar}} [X, H] e^{-\frac{iHt}{\hbar}} =$$

$$= \frac{1}{i\hbar} e^{\frac{iHt}{\hbar}} \left(\left[X, \frac{P^2}{2m}\right] + \underbrace{\left[X, \frac{1}{2} m\omega^2 X^2\right]}_{=0} \right) e^{-\frac{iHt}{\hbar}}$$

$$= \frac{P_H}{m} \quad (\text{wie vorher!})$$

aber

$$\frac{dP_H(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} e^{\frac{iHt}{\hbar}} [P, H] e^{-\frac{iHt}{\hbar}} =$$

$$= \frac{1}{i\hbar} e^{\frac{iHt}{\hbar}} \left(\underbrace{\left[P, \frac{P^2}{2m}\right]}_{=0} + \left[P, \frac{1}{2} m\omega^2 X^2\right] \right) e^{-\frac{iHt}{\hbar}}$$

$$= \frac{1}{i\hbar} \frac{1}{2} m\omega^2 e^{\frac{iHt}{\hbar}} \left([P, X^2] \right) e^{-\frac{iHt}{\hbar}}$$

$$\frac{dP_H}{dt} = \frac{m\omega^2}{i\hbar 2} e^{\frac{iHt}{\hbar}} \left(PX^2 - X^2P \right) e^{-\frac{iHt}{\hbar}} = -\frac{m\omega^2}{\cancel{i\hbar} 2} e^{\frac{iHt}{\hbar}} \cancel{2i\hbar} X e^{-\frac{iHt}{\hbar}}$$

$$\begin{aligned} PX^2 - X^2P &\to PX^2 - XPX + XPX - X^2P \\ &= [P, X]X + X[P, X] \\ &= -2i\hbar X \end{aligned}$$

$$\frac{dP_H(t)}{dt} = -m\omega^2 X_H(t)$$

, die – wenn gekoppelt mit der Differenzialgleichung für $X_H(t)$ –, gibt

$$\begin{cases} \dfrac{d^2X_H(t)}{dt^2} + \omega^2 X_H(t) = 0 \\ \dfrac{d^2P_H}{dt^2} + \omega^2 P_H(t) = 0 \end{cases}$$

deren Lösung ist

$$\Longrightarrow \begin{cases} X_H(t) = X_H(0)\cos\omega t + \dfrac{P_H(0)}{m\omega}\sin\omega t \\ P_H(t) = P_H(0)\cos\omega t - m\omega X_H(0)\sin\omega t \end{cases}$$

, wobei $X_H(0) = X$; $P_H(0) = P$, deswegen

$$\begin{cases} X_H(t) = X\cos\omega t + \dfrac{P}{m\omega}\sin\omega t \\ P_H(t) = P\cos\omega t - m\omega X\sin\omega t \end{cases}$$

5. Aufgabe (Zerfließen des Gauß'schen Wellepakets)

Wir entwickeln zuerst $\psi(x,0)$ nach Potenzen von:

$z \equiv x - i\frac{p_0\Delta^2}{\hbar}$, wie folgt

$$\psi(x,0) = (\Delta^2\pi)^{-1/4}\, e^{-\left(-\frac{x^2}{2\Delta^2} + \frac{i p_0 x}{\hbar}\right)} = (\Delta^2\pi)^{-1/4}\, e^{-\left(-\frac{x}{2\Delta^2}\left[x - \frac{2 i p_0 \Delta^2}{\hbar}\right]\right)} =$$

$$= (\Delta^2\pi)^{-1/4}\, e^{-\left(\frac{1}{2\Delta^2}\left[z + \frac{i p_0\Delta^2}{\hbar}\right]\times\left[z - \frac{i p_0 \Delta^2}{\hbar}\right]\right)} =$$

$$x = z + \frac{i p_0\Delta^2}{\hbar^2}$$

$$= (\Delta^2\pi)^{-1/4}\, e^{-\left(\frac{z^2}{2\Delta^2} + \frac{1}{2}\frac{p_0^2\Delta^2}{\hbar^2}\right)} = \overbrace{(\Delta^2\pi)^{-1/4}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{p_0^2\Delta^2}{\hbar^2}}}^{\text{def: } A(p_0)} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!}\left(\frac{z^2}{2\Delta^2}\right)^m$$

Wir können jetzt die Zeitentwicklung des Gauß'schen Wellepakets berechnen

$$\psi(x,t) = U(t)\,\psi(x,0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{i\hbar t}{2M}\right)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\,\psi(x,0)$$

$$= A(p_0)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{i\hbar t}{2M}\right)^n \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\frac{1}{(2\Delta)^{2m}}\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left(z^{2m}\right)$$

wobei $\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} z^{2m} = \frac{d^{2n}}{dz^{2n}} z^{2m} = (2m)(2m-1)\cdots(2m-2n+1)\, z^{2m-2n}$

$$= \frac{2m!}{(2m-2n)!}\, z^{2m-2n}$$

wenn $m \geq n$, oder null sonst

Deswegen

$$\psi(x,t) = A(p_0) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\hbar t}{2M}\right)^n \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{(2\Delta^2)^m} \frac{2m!}{(2m-2n)!} z^{2m-2n}$$

Um alle Summe von null bis ∞ zu definieren, können wir ~~den~~ Index m verschieben, und zwar $m-n \Rightarrow m$

$$\psi(x,t) = A(p_0) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\hbar t}{2M}\right)^n \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{(m+n)!} \frac{1}{(2\Delta^2)^{m+n}} \frac{(2m+2n)!}{2m!} z^{2m}$$

$$= A(p_0) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{4^n} \underbrace{\left(\frac{i\hbar t}{M\Delta^2}\right)}_{= y}{}^{n} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(2m+2n)!}{(m+n)} \frac{(-1)^m z^{2m}}{2m!\ 2\Delta^m}$$

Mit dem Ziel die Indiges m und n zu trennen (so weit wie möglich), können wir die Faktoriolen Koeffizienten umschreiben

$$\frac{1}{(m+n)!} \cdot \frac{(2m+2n)!}{(2m)!} = \frac{1}{(m+n)!} \left[(2m+1)(2m+2) \cdots (2m+2n)\right]$$

$$= \frac{2^{2n}}{(m+n)!} \left[(m+1/2)(m+1) \cdots (m+n)\right]$$

$$= \frac{4^n}{m!} \frac{\left[(m+1/2)\cancel{(m+1)} \cdots \cancel{(m+n)}\right]}{\cancel{(m+1)} \cdots \cancel{(m+n)}}$$

$$= \frac{4^n}{m!} (m+1/2)(m+3/2) \cdots$$

Mit dieser Umschreibung, bekommen wir:

$$\psi(x,t) = A(p_0) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} y^n \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{z^2}{2\Delta^2}\right)^m (m+\tfrac{1}{2})(m+\tfrac{3}{2}) \cdots (m+\tfrac{2n}{2}$$

$$= A(p_0) \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{z^2}{2\Delta^2}\right)^m \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} y^n (m+\tfrac{1}{2})(m+\tfrac{3}{2}) \cdots (m+\tfrac{2n-1}{2}$$

Aber wir wissen, dass (Zweiter Hinweis)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n y^n}{n!} (m+\tfrac{1}{2}) \cdots (m+\tfrac{2n-1}{2}) \cong 1 - (m+\tfrac{1}{2}) y + \frac{(m+\tfrac{1}{2})(m+\tfrac{3}{2})}{2!} y^2 + \cdots$$

$$\cong (1+y)^{-m-\frac{1}{2}}$$

Deswegen

$$\psi(x,t) = A(p_0) \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{z^2}{2\Delta^2}\right)^m (1+y)^{-m-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{A(p_0)}{\sqrt{1+y}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{z^2}{2\Delta^2(1+y)}\right)^m = \frac{A(p_0)}{\sqrt{1+y}} e^{-\frac{1}{2}\frac{z^2}{\Delta^2(1+y)}}$$

Man kann nun die zeitabhängigen Variablen $\tilde{\Delta} = \Delta\sqrt{1+y}$ und $\tilde{p}_0 = p_0/_{1+y}$ einführen

$$\psi(x,t) = \frac{A(p_0)}{\sqrt{1+y}} e^{-\frac{z^2}{2\tilde{\Delta}^2}} \overset{\text{zurück zur Variabel } x}{=} \frac{A(p_0)}{\sqrt{1+y}} e^{\left(-\frac{1}{2\tilde{\Delta}^2}\left[x - \frac{i\tilde{p}_0\tilde{\Delta}^2}{\hbar}\right]^2\right)} =$$

$$= \frac{A(\tilde{p}_0)}{\sqrt{1+y}}\, e^{\left[-\frac{x^2}{2\tilde{\Delta}^2} + \frac{i\tilde{p}_0 x}{\hbar} + \frac{\tilde{p}_0^2\tilde{\Delta}^2}{2\hbar^2}\right]} =$$

$$= \frac{(\Delta^2\pi)^{-1/4}}{\sqrt{1+y}}\, e^{\left[-\frac{x^2}{2\tilde{\Delta}^2} + \frac{i\tilde{p}_0 x}{\hbar} - \frac{p_0^2\Delta^2}{2\hbar^2}\left(1-\frac{1}{1+y}\right)\right]}$$

$$= \frac{(\Delta^2\pi)^{-1/4}}{\sqrt{1+y}}\, e^{\left[-\frac{x^2}{2\Delta^2(1+y)} + \frac{ip_0 x}{\hbar(1+y)} - \frac{p_0^2\Delta^2 y}{2\hbar^2(1+y)}\right]}$$

Zusätzliche Bemerkung:

Die physikalische Bedeutung des Parameters $y \equiv i\gamma$ versteht man am besten, wenn man zusätzlich noch die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(x,t)|^2$ ausrechnet [dies war nicht gefragt]:

$$|\psi(x,t)|^2 = \frac{(\Delta^2\pi)^{-1/2}}{\sqrt{1+\gamma^2}} \left| \exp\left\{-\frac{x^2(1-i\gamma)}{2\Delta^2(1+\gamma^2)} + \frac{ip_0 x(1-i\gamma)}{\hbar(1+\gamma^2)} - \frac{p_0^2\Delta^2 i\gamma(1-i\gamma)}{2\hbar^2(1+\gamma^2)}\right\}\right|^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi\Delta^2(1+\gamma^2)}} \exp\left\{-\frac{x^2}{\Delta^2(1+\gamma^2)} + \frac{2p_0\gamma x}{\hbar(1+\gamma^2)} - \frac{p_0^2\Delta^2\gamma^2}{\hbar^2(1+\gamma^2)}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi\Delta^2(1+\gamma^2)}} \exp\left\{-\left(\frac{x - p_0\gamma\Delta^2/\hbar}{\Delta\sqrt{1+\gamma^2}}\right)^2\right\}$$

Hieraus geht hervor, daß das Wellenpaket sich mit Geschwindigkeit $p_0\gamma\Delta^2/\hbar t = p_0/m$ bewegt, wobei es sich außerdem ausdehnt: Die charakteristische Breite des Wellenpakets ist dabei gegeben durch $\Delta\sqrt{1+\gamma^2} = \Delta\sqrt{1+\left(\frac{\hbar t}{m\Delta^2}\right)^2} = \sqrt{\Delta^2+\left(\frac{\hbar t}{m\Delta}\right)^2}$.

Alternative Lösung (Aufgabe 5) (1)

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi\Delta^2}} e^{i\frac{p_0 x}{\hbar}} e^{-\frac{x^2}{2\Delta^2}}$$

$$\psi(p,0) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^d}} \int d^dx\, e^{-\frac{i\vec{p}\vec{x}}{\hbar}} \psi(x,0) =$$

(from now on d=1)

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx\, e^{-\frac{ipx}{\hbar}} \frac{1}{\sqrt[4]{\pi\Delta^2}} e^{i\frac{p_0 x}{\hbar} - \frac{x^2}{2\Delta^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{1}{\sqrt[4]{\pi\Delta^2}} \int dx\, e^{-\frac{i(p-p_0)}{\hbar}x} e^{-\frac{x^2}{2\Delta^2}}$$

$$y = x + \frac{i(p-p_0)}{\hbar}\Delta^2 \qquad y^2 = x^2 + \frac{2i(p-p_0)}{\hbar}\Delta^2 x - \frac{(p-p_0)^2}{\hbar^2}\Delta^4$$

$$\longrightarrow -\frac{x^2}{2\Delta^2} - i\frac{p-p_0}{\hbar}x = -\frac{y^2}{2\Delta^2} - \frac{(p-p_0)^2\Delta^2}{2\hbar^2}$$

$$\psi(p,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{1}{\sqrt[4]{\pi\Delta^2}} \int dy\, e^{-\frac{y^2}{2\Delta^2}} e^{-\frac{(p-p_0)^2\Delta^2}{2\hbar^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{1}{\sqrt[4]{\pi\Delta^2}} \Delta\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\Delta^2}{2\hbar^2}(p-p_0)^2}$$

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{i\hbar t}{2m}\right)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \psi(x,0)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dp\, e^{i\frac{px}{\hbar}} \psi(p,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{i\hbar t}{2m}\right)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i\frac{px}{\hbar}} \psi(p,0) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{i\hbar t}{2m}\right)^n \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left(\frac{ip}{\hbar}\right)^{2n} e^{i\frac{px}{\hbar}} \psi(p,0) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{i\hbar t}{2m}\right)^n \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left(\frac{ip}{\hbar}\right)^{2n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{1}{\sqrt[4]{\pi\Delta^2}} \Delta\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\Delta^2}{2\hbar^2}(p-p_0)^2} e^{i\frac{px}{\hbar}}$$

$$\psi(p,t) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{i\hbar t}{2m}\right)^n \left(\frac{ip}{\hbar}\right)^{2n}}_{= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{-i t p^2}{2m\hbar}\right)^n} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{1}{\sqrt[4]{\pi\Delta^2}} \Delta\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\Delta^2}{2\hbar^2}(p-p_0)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{1}{\sqrt[4]{\pi\Delta^2}} \Delta\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\Delta^2}{2\hbar^2}(p-p_0)^2} e^{-\frac{ip^2 t}{2m\hbar}}$$

AH $\quad p^2 - 2pp_0 + p_0^2 \quad$ 2

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp\, e^{i\frac{px}{\hbar}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{1}{\sqrt[4]{\pi\Delta^2}} \Delta\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\Delta^2}{2\hbar^2}(p-p_0)^2} e^{-i\frac{p^2 t}{2m\hbar}} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{\sqrt[4]{\pi\Delta^2}} \Delta\sqrt{2\pi}}_{C} \int dp\, e^{i\frac{px}{\hbar}} e^{-\frac{\Delta^2}{2\hbar^2}p^2 + \frac{\Delta^2}{\hbar^2}pp_0 - \frac{\Delta^2}{2\hbar^2}p_0^2} e^{-i\frac{p^2 t}{2m\hbar}} =$$

$$= C \int dp\, e^{-p^2\underbrace{\left(\frac{\Delta^2}{2\hbar^2} + \frac{it}{2m\hbar}\right)}_{\alpha} - ip\underbrace{\left(-\frac{x}{\hbar} + i\frac{p_0}{\hbar^2}\Delta^2\right)}_{\beta}} e^{-\frac{\Delta^2}{2\hbar^2}p_0^2}$$

$$y = p + i\frac{\beta}{2\alpha} \quad y^2 = p^2 + \frac{i\beta}{\alpha}p - \frac{\beta^2}{4\alpha^2} \Rightarrow -\alpha p^2 - i\beta p = -\alpha y^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha}$$

$$\psi(x,t) = C\, e^{-\frac{\Delta^2}{2\hbar^2}p_0^2} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} \int dy\, e^{-\alpha y^2} \longrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\Delta^2}{2\hbar^2}(1+\gamma)}} \quad \text{where } \gamma = \frac{i\hbar t}{m\Delta^2}$$

$$e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} = \exp\left[-\underbrace{\left(-\frac{x}{\hbar} + i\frac{p_0}{\hbar^2}\Delta^2\right)^2}_{\frac{x^2}{\hbar^2} - 2i\frac{p_0}{\hbar^3}\Delta^2 x - \frac{p_0^2\Delta^4}{\hbar^4}} \frac{1}{4\frac{\Delta^2}{2\hbar^2}(1+\gamma)}\right] = \exp\left[-\frac{x^2}{2\Delta^2(1+\gamma)} + \frac{ip_0 x}{\hbar(1+\gamma)} + \frac{p_0^2\Delta^2}{2\hbar^2(1+\gamma)}\right]$$

$$\psi(x,t) = C\, e^{-\frac{x^2}{2\Delta^2(1+\gamma)}} e^{\frac{ip_0 x}{\hbar(1+\gamma)}} e^{-\frac{\Delta^2 p_0^2}{2\hbar^2}\overbrace{\left(1 - \frac{1}{1+\gamma}\right)}^{\gamma/(1+\gamma)}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\Delta^2}{2\hbar^2}(1+\gamma)}}\sqrt{\pi}$$

$$\frac{\frac{1}{2\pi\cancel{\hbar}} \frac{1}{(\pi\Delta^2)^{1/4}} (\Delta^2)^{1/2}\sqrt{2\pi}}{\frac{(\Delta^2)^{1/2}\sqrt{1+\gamma}}{(2\cancel{\hbar^2})^{1/2}}}\sqrt{\pi} = \pi^{-1-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \left(\Delta^{2/2 - \frac{1}{4} - 1/2}\right) = (\pi\Delta^2)^{-\frac{1}{4}} \quad ✓$$

$$\psi(x,t) = (\pi\Delta^2)^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{1+\gamma}}\, e^{-\frac{x^2}{2\Delta^2(1+\gamma)} + \frac{ip_0 x}{\hbar(1+\gamma)} - \frac{p_0^2\Delta^2\gamma}{2\hbar^2(1+\gamma)}} \quad \left(\gamma = \frac{i\hbar t}{m\Delta^2}\right)$$

✓

6.) Ausgabe

a) Entwicklung der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung:

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = mc^2\sqrt{1+\frac{p^2}{m^2c^2}} \cong mc^2\left[1+\frac{1}{2}\frac{p^2}{m^2c^2} - \frac{1}{8}\frac{p^4}{m^4c^4} + \dots\right]$$

$$(1+x)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{1}{4}x^2 + o(x^3)$$

$$E \cong mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{8}\frac{p^4}{m^3c^2}$$

Identifikation von H_1

$$H = \underbrace{\frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{R}}_{H_0} \underbrace{- \frac{1}{8}\frac{p^4}{m^3c^2}}_{H_1}$$

Wir können dann beobachten, dass $H_1 = -\frac{1}{8}\frac{p^4}{m^3c^2} = -\frac{1}{2m}\left(\frac{p^2}{2m}\right)^2 \frac{1}{c^2}$

und dass $H_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{R} \Rightarrow \frac{p^2}{2m} = H_0 + \frac{Ze^2}{R}$

deswegen $H_1 = -\frac{1}{2mc^2}\left(H_0 + \frac{Ze^2}{R}\right)^2$

b) Die Eigenzustände des Hamilton Operators H_0 sind

Magnetischequantenzahl

$$H_0 |n\,l\,m\rangle = E_n |n\,l\,m\rangle = -\frac{(Ze)^2}{2an^2}|n\,l\,m\rangle$$

Haupt Quantenzahl

orbital Quantenzahl

Nur von n abhängig!

Die Andwendung der "Standard" Formel die I. Ordnug der Störungstheorie gibt:

$$\Delta E_1 = \langle n\ell m | H_1 | n\ell m\rangle = -\frac{1}{2mc^2}\left(E_n^2 + 2E_n Ze^2 \langle n\ell m | \frac{1}{R} | n\ell m\rangle + (Ze^2)^2 \langle n\ell m | \frac{1}{R^2} | n\ell m\rangle \right) \quad (*)$$

wobei wir den expliziten Ausdruck der $\langle \frac{1}{R}\rangle_{n\ell}$, $\langle \frac{1}{R^2}\rangle_{n\ell}$ Integrale benutzen können:

$$\Delta E_1(n\ell) = -\frac{mc^2 (Z\alpha)^2}{2n^2} \frac{(Z\alpha)^2}{n^2} \left(\frac{n}{\ell + 1/2} - \frac{3}{4} \right).$$

wobei α die Feinstruktur Konstante ist $\left(\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137} \right)$

(*) Bemerkungen: Die Eigenzustände des Hamilton-Operators H_0 sind entartet (E_n ist nur von n abhängig), deswegen sollte man in Prinzip die Komplizientere Formel für die entartete Störungtheorie benutzen.

Trotzdem ist die Anwendung der Formel (*) möglich, weil

$$\langle n, \ell', m' | H_1 | n, \ell, m\rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$$

(H_1 ist diagonal in der $|n\ell m\rangle$ Basis!)

Beweis:

$[H_1, L^2] = 0$; $[H, L_z] = 0$ (Rotationsinvarianz!)

- $[H_1, L^2] = 0 \Rightarrow \hbar^2 [\ell'(\ell'+1) - \ell(\ell+1)] \langle n \ell' m' | H_1 | \ell m \rangle = 0$
- $[H_1, L_z] = 0 \Rightarrow \hbar (m' - m) \langle n \ell' m' | H_1 | n \ell m \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle n \ell' m' | H_1 | n \ell m \rangle = 0$ wenn $\ell \neq \ell'$ oder $m \neq m'$