Aufgabe 9.) "Anomaler" Zeeman Effekt

Das magnetische Feld $\vec{B}$ ist Konstant, und wir Können $\vec{B}$ entlang der z-Richtung annehmen

$$\vec{B} = B_z \hat{z}$$

Deswegen läßt unserer Hamilton-operator sich schreiben wie

$$H = \underbrace{\frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{R} + \xi(R)\,\vec{L}\cdot\vec{S}}_{H_0 = \text{Ungestörtes Problem}} + \underbrace{\frac{\mu_B}{\hbar}(L_z + 2S_z)B_z}_{H_1 = \text{Störung}},$$

wobei $[H_0, J^2] = 0$ und $[H_0, J_z] = 0$, deswegen

$$H_0 |J, m, l, s\rangle = E_0(j, l) |J, m, l; s\rangle \quad \text{mit} \quad \vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

a) Wir Können am besten H_1 als Funktion von J_z umschreiben

$$H_1 = \frac{\mu_B}{\hbar}(J_z + S_z) B_z$$

In der Ersten Ordnung Störungstheorie bekommen wir

$$\Delta E_{Zeeman} = \langle J, m, l, s | H_1 | J, m, l, s\rangle =$$

$$= \frac{\mu_B}{\hbar}\left[\hbar\, m\, B_z + \langle J, m, l, s | S_z | J, m, l, s\rangle\right]$$

$$= \frac{\mu_B}{\hbar}\left[\hbar\, m\, B_z + \langle j, m, l, s | S_z | J, m, l, s\rangle\right]$$

b) Um den expliziten Wert der Zeeman Korrektur zu rechnen, müssen wir die Matrixelemente $\langle j\, m\, l\, s | S_z | j\, m\, l\, s\rangle$ berechnen.

wobei $j = l \pm 1/2$, und mit der Hilfe der Clebsch-Gordon Koeffizienten

- $\langle j = l+1/2, m, l, s | S_z | j = l+1/2, m, l, s\rangle =$

$$= \left(\frac{l+m+1/2}{2l+1}\right) \langle l, m-1/2| \langle + | S_z | +\rangle | l, m-1/2\rangle +$$

$$+ \left(\frac{l-m+1/2}{2l+1}\right) \langle l, m+1/2| \langle - | S_z | -\rangle | l, m+1/2\rangle =$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left(\frac{l+m+1/2}{2l+1}\right) - \frac{\hbar}{2}\left(\frac{l-m+1/2}{2l+1}\right) = \frac{\hbar}{\cancel{2}} \frac{1}{2l+1} (\cancel{2}m) = \hbar \frac{m}{2l+1}$$

- $\langle j = l-1/2, m, l, s | S_z | j = l-1/2, m, l, s\rangle =$

$$= \left(\frac{l-m+1/2}{2l+1}\right) \langle l, m-1/2| \langle + | S_z | +\rangle | l, m-1/2\rangle +$$

$$+ \left(\frac{l+m+1/2}{2l+1}\right) \langle l, m+1/2| \langle - | S_z | -\rangle | l, m+1/2\rangle =$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left(\frac{l-m-1/2}{2l+1}\right) - \frac{\hbar}{2}\left(\frac{l+m+1/2}{2l+1}\right) = -\frac{m\hbar}{2l+1}$$

Deswegen

$$\Delta E_{Zeeman} = \begin{cases} \frac{\mu_B}{\hbar}\left[m\hbar + \frac{m}{2l+1}\hbar\right]B_z = \mu_B \frac{2l+2}{2l+1} m \cdot B_z & (j = l + 1/2) \\ \frac{\mu_B}{\hbar}\left[m\hbar - \frac{m\hbar}{2l+1}\right] = \mu_B \frac{2l}{2l+1} m B_z & (j = l - 1/2) \end{cases}$$

Bemerkungen: Die Anomale Zeeman ufspaltung ist l und j abhängig (mit unterschiedlichen Ausdrücken für die Fälle $j = l \pm 1/2$), deswegen bekommt man viel mehr Linien im Experimentellen Spektrum als erwartet im normalem Zeeman Effekt.

Aufgabe 10.)

a)

In der ersten Ordnung der zeitabhängigen Störungstheorie läßt sich die Wahrscheinlichkeit eines Übergangs von $|0\rangle$ nach $|n\rangle$ (wobei $|n\rangle$ der n-te Eigenvektor des ungestörten Hamilton-Operators ist) schreiben als:

$$W_{0\to n}(t-t_0) = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_{t_0}^{t} dt'\, e^{\frac{i}{\hbar}(E_n^0-E_0^0)t'} \langle n|V(t')|0\rangle\right|^2$$

wobei $H(t) = H_0 + V(t)$.

In unserem Fall: $V(t) = -qX\mathcal{E}(t)$ $\left(q\vec{\mathcal{E}} = -\vec{\nabla}V = -\frac{d}{dx}V\right)$

und $t_0 = -\infty$, $t = \infty$, $\mathcal{E}(t) = \frac{A}{\sqrt{\pi}\,\tau} e^{-t^2/\tau^2}$, $E_n^0 = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$

[Harmonischer Oszillator]

Deswegen

$$W_{0\to n}(\infty,-\infty) = \frac{A^2q^2}{\pi\tau^2\hbar^2}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, e^{+in\omega t'} e^{-t'^2/\tau^2}\langle n|X|0\rangle\right|^2$$

Der Wert des Matrizenelements $\langle n|X|0\rangle$ ist einfach rechnbar, z. B. durch die Darstellung des X operators in Vernichtungs/Erzeugungsoperatoren a^+, a.

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a+a^+) \qquad \begin{cases} a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \\ a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \end{cases}$$

und ist $\langle n | X | 0 \rangle = \delta_{n1} \langle 1 | X | 0 \rangle$

$$= \delta_{n1} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

Deswegen folgt dass

$$W_{0\to n} = \delta_{n1} \frac{A^2 q^2}{2\pi\, m \hbar\omega\, \tau^2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, e^{i\omega t - \left(\frac{t'}{\tau}\right)^2} \right|^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n > 0$$

Um das Integral zu lösen, kann man den Exponenten im Integranden zu einem vollständigen Quadrat ergänzen:

$$i\omega t' - \left(\frac{t'}{\tau}\right)^2 = -\frac{1}{\tau^2}\left(t' - \frac{i\omega\tau^2}{2}\right)^2 - \frac{\omega^2\tau^2}{4}$$

$$W_{0\to n} = \delta_{n1} \frac{A^2 q^2}{2\pi m \hbar\omega \tau^2} e^{-\frac{\omega^2\tau^2}{2}} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{\tau^2}\left(t' - \frac{i\omega\tau^2}{2}\right)^2} dt' \right|^2$$

↳ Gauss Integral mit $\sigma^2 = \frac{\tau^2}{2}$
(nicht Normiert)

$$= \delta_{n1} \frac{A^2 q^2}{2\pi m \hbar\omega \tau^2} e^{-\frac{\omega^2\tau^2}{2}} \left(\sqrt{\pi}\,\tau\right)^2$$

$$\int dx\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \sqrt{2\pi\sigma^2} = \sqrt{\pi}\,\tau$$

$$W_{0\to n} = \delta_{n1} \frac{A^2 q^2}{2m\hbar\omega} \cdot e^{-\frac{\omega^2\tau^2}{2}} \quad \begin{cases} W_{0\to 1} = \frac{A^2 q^2}{2m\hbar\omega} e^{-\frac{\omega^2\tau^2}{2}} \\ W_{0\to 2}, W_{0\to 3} \cdots = 0 \end{cases}$$

Deswegen $W_{0\to 0} = \left[1 - W_{0\to 1}\right] = 1 - \frac{A^2 q^2}{2m\hbar\omega} e^{-\frac{\omega^2\tau^2}{2}}$

b) Die Beschränkung auf die erste Ordnung Störungstheorie ist möglich, wenn die "Störung" $V_0(t)$ im betrachten Zeitintervall genügend "schwach" ist, sodass die Übergangswahrscheinlichkeiten $W_{0\to n}$ viel kleiner als 1 bleiben.

[Im Fall unseres Zeitintervalls $t \in (-\infty, +\infty)$ ist das möglich, wenn $V(t)$ genügend schnell "abklingt"]

Eine direkte Abschätzung gibt:

$$W_{0\to 1}(t) \ll 1 \Rightarrow \frac{A^2 q^2}{2m\hbar\omega} e^{-\frac{\omega^2\tau^2}{2}} \ll 1$$

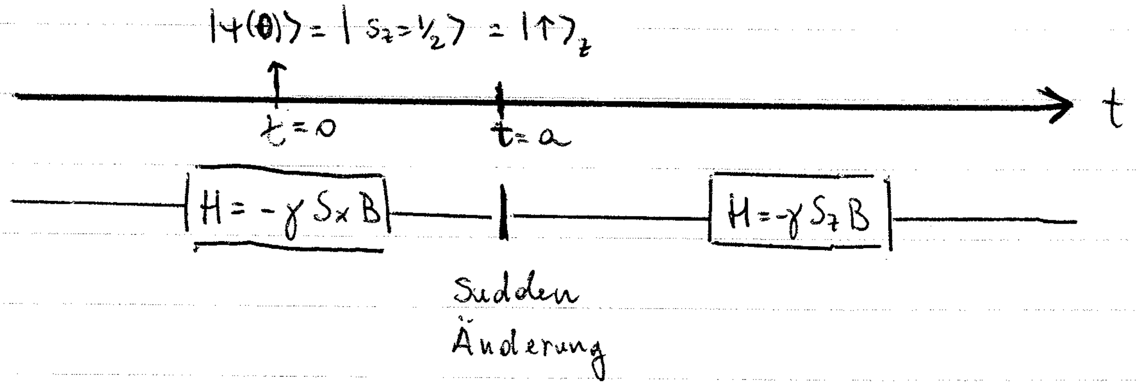
Diese Voraussetzung ist jedenfalls erfüllt, falls $\frac{A^2q^2}{2m} \ll \hbar\omega$ gilt.

Aufgabe 11.)

Der Hamilton-Operator unseres Systems läßt sich schreiben als

$$H(t) = -\gamma \vec{S} \cdot \vec{B}(t) \quad , \text{ wobei } \begin{cases} \vec{B}(t) = B\hat{x} & -\infty \leq t \leq a \\ \vec{B}(t) = B\hat{z} & t > a \end{cases}$$

Die physikalische Situation ist folgende:



ERSTE SCHRITT: Im Zeitintervall $t \in (0, a)$ wird die Zeitentwicklung unseres Spins von $H = -\gamma S_x B$ gegeben. D.h.

$$H = -\gamma B \begin{pmatrix} 0 & \hbar/2 \\ \hbar/2 & 0 \end{pmatrix} = -\gamma \frac{\hbar}{2} B \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

in der Basis $\{ |+\rangle_z, |-\rangle_z \}$ $\left(\equiv \{ |S_z = +1/2\rangle, |S_z = -1/2\rangle \} \right)$

Die Zeitentwicklung wird einfach in der Eigen Basis gerechnet

igen
erte

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1 \quad \begin{cases} E_+^x = -\gamma \frac{\hbar}{2} B \\ E_-^x = +\gamma \frac{\hbar}{2} B \end{cases}$$

• Eigenvektoren

$$\begin{cases} \lambda = 1 & |+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle_z + |-\rangle_z \right) \\ \lambda = -1 & |-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle_z - |-\rangle_z \right) \end{cases}$$

Deswegen können wir unseren Anfangszustand in der Eigenbasis von H einfach so umschreiben

$$|\psi(t=0)\rangle = |+\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_x + |-\rangle_x\right)$$

Und ~~die~~ Zeitentwicklung wird ab $t=0$ ~~bis~~ $t=a$ definiert von

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_x e^{-i\frac{E_+^x t}{\hbar}} + |-\rangle_x e^{-i\frac{E_-^x t}{\hbar}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_x e^{-i\gamma\frac{\hbar}{2}\frac{Bt}{\hbar}} + |-\rangle_x e^{-i\gamma\frac{\hbar Bt}{2\hbar}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_x e^{i\gamma\frac{Bt}{2}} + |-\rangle_x e^{-i\gamma\frac{Bt}{2}}\right)$$

die man auch in der alten Basis $\{|+\rangle_z, |-\rangle_z\}$ schreiben kann

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}\left(|+\rangle_z + |-\rangle_z\right) e^{i\gamma\frac{Bt}{2}} + \frac{1}{2}\left(|+\rangle_z - |-\rangle_z\right) e^{-i\gamma\frac{Bt}{2}}$$

$$= \cos\left(\gamma\frac{Bt}{2}\right)|+\rangle_z + i\sin\left(\gamma\frac{Bt}{2}\right)|-\rangle_z$$

Nachdem, bei $t=a$ die Richtung des magnetischen Feld plötzlich von x nach z geändert.

In der "Sudden Approximation" nehmen wir an, dass das Zeitintervall der Änderung so kurz ist, dass sich unser Zustand in dieser Zeit nicht ändert.

Deswegen wird die Zeitentwicklung von $t > a$ einfach von dem "neuen" Hamilton-Operator für $t>a$ $H = -\gamma S_z B$ definiert, der auf einen "neuen" Anfangszustand $|\psi(t=a)\rangle$ wirkt:

$$|\psi(t=a)\rangle = \cos\left(\frac{\gamma\beta a}{2}\right)|+\rangle_z + i\sin\left(\frac{\gamma\beta a}{2}\right)|-\rangle_z$$

$$H = -\gamma B S_z = -\gamma\frac{\hbar}{2}B\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \qquad \text{für } t>a$$

H ist diagonal in der Basis $|+\rangle_z, |-\rangle_z$ mit Eigenwerten E

$$|\psi(t)\rangle = \cos\left(\frac{\gamma\beta a}{2}\right)e^{+i\frac{\gamma B(t-a)}{2}}|+\rangle_z + i\sin\left(\frac{\gamma\beta a}{2}\right)e^{-i\frac{\gamma B(t-a)}{2}}|-\rangle_z$$

Insgesamt; für alle Zeiten $t>a$; in der Basis $\{|+\rangle_z, |-\rangle_z\}$

$$|\psi(t)\rangle = \begin{cases} \cos\left(\frac{\gamma\beta t}{2}\right)|+\rangle_z + i\sin\left(\frac{\gamma\beta t}{2}\right)|-\rangle_z & 0\le t\le a \\ e^{i\frac{\gamma B(t-a)}{2}}\cos\left(\frac{\gamma\beta a}{2}\right)|+\rangle_z + i e^{i\frac{\gamma B(t-a)}{2}}\sin\left(\frac{\gamma\beta a}{2}\right)|-\rangle_z & t>a \end{cases}$$