Aufgabe 12.) "Zwei Definitionen für die Entropie"

Aus

$$S(T) = -\frac{\partial}{\partial T} F(T) \quad , \text{wobei} \quad F(T) = -k_B T \ln\left(\text{Spur}\, e^{-\frac{H}{k_B T}}\right)$$

bekommen wir

$$S(T) = k_B \ln\Big[\underbrace{\text{Spur}\, e^{-H/k_B T}}_{= Z(T)}\Big] + k_B T \frac{\text{Spur}\left(\frac{H}{k_B T^2} e^{-\frac{H}{k_B T}}\right)}{\text{Spur}\, e^{-H/k_B T}}$$

$$\hookrightarrow S(T) = k_B \ln Z + \frac{1}{T} \frac{\text{Spur}\left(H e^{-\frac{H}{k_B T}}\right)}{Z} \quad (*)$$

Auf der anderen Seite

$$S(T) = -k_B \,\text{Spur}\,(\rho \ln \rho) \quad \text{wobei} \quad \rho = \frac{e^{-\frac{H}{k_B T}}}{Z}$$

Wir können nun $\ln \rho$ ermitteln:

$$\ln \rho = \ln \frac{e^{-H/k_B T}}{Z} = \ln e^{-H/k_B T} - \ln Z = -\frac{H}{k_B T} - \ln Z$$

Aus den Eigenschaften der Spur folgt, dass:

$$\rho \ln \rho = \frac{-\frac{H}{k_B T} e^{-\frac{H}{k_B T}}}{Z} - \rho \ln Z$$

$$\Rightarrow -k_B \,\text{Spur}\,[\rho \ln \rho] = \frac{1}{T} \cdot \frac{\text{Spur}\left[H e^{-H/k_B T}\right]}{Z(T)} + k_B \ln Z \cdot \underbrace{\text{Spur}\, \rho}_{= 1}$$

Wir erhalten also wieder (*), d. h.

$$S(T) = k_B \ln Z + \frac{1}{T} \frac{\text{Spur}\left(H e^{-H/k_B T}\right)}{Z(T)}$$

Aufgabe 13.) "Dichte-Operator für ein Spin 1/2 System"

a)

Nach der Messung im Stern-Gerlach Apparat ist der Spin 1/2 entlang der Richtung $\hat{n}$ orientiert, deshalb ist der Zustand des Spins ein Eigenzustand des Operators

$$\frac{\hbar}{2}\,\hat{n}\cdot\vec{\sigma} = \frac{\hbar}{2}\left(n_x \sigma_x + n_y \sigma_y + n_z \sigma_z\right) = \frac{\hbar}{2}\left(\sin\theta\cos\phi\,\sigma_x + \sin\theta\sin\phi\,\sigma_y + \cos\theta\,\sigma_z\right),$$

mit Eigenwert $+\frac{\hbar}{2}$

Es ist einfach den Operator

$$\hat{n}\cdot\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\phi} \\ \sin\theta\, e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

, wobei wir den expliziten Ausdruck der Paulimatrizen benutzen haben,

direkt zu diagonalisieren:

$$\begin{cases} |+\rangle_n = \cos\frac{\theta}{2}\, e^{-i\frac{\phi}{2}}\,|\uparrow\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\, e^{+i\frac{\phi}{2}}\,|\downarrow\rangle & \text{mit Eigenwert } +1 \\ |-\rangle_n = -\sin\frac{\theta}{2}\, e^{-i\frac{\phi}{2}}\,|\uparrow\rangle + \cos\frac{\theta}{2}\, e^{+i\frac{\phi}{2}}\,|\downarrow\rangle & \text{〃} \quad -1 \end{cases}$$

, wobei $|\uparrow\rangle = |S_z = \frac{1}{2}\rangle$; $|\downarrow\rangle = |S_z = -\frac{1}{2}\rangle$

Der Dichte-Operator nach den Messungen im Stern-Gerlach Apparat lässt sich schreiben als

$$\rho = |+\rangle_n \langle +|_n \qquad \text{mit} \qquad |+\rangle_n = \cos\frac{\theta}{2}\,|\uparrow\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\,|\downarrow\rangle$$

In der $\{ S_z = \pm 1/2 \}$ Basis ist sein expliziter Ausdruck folgender:

$$\rho = \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\, e^{-i\phi} \\ \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\, e^{i\phi} & \sin^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

Jeder Operator 2×2 (wie ρ in diesem Fall) kann immer in der Basis $\{ \mathbb{1}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z \}$ geschrieben werden

$$\rho = a_0 \mathbb{1} + \vec{a}\cdot\vec{\sigma} \quad , \quad \text{wobei} \quad a_0 = \frac{1}{2}\,\text{Spur}[\rho] \, , \; a_i = \frac{1}{2}\,\text{Spur}[\rho$$

In unserem Falle:

$$a_0 = \frac{1}{2}\,\text{Spur}\,\rho = \frac{1}{2}\left[\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right] = \frac{1}{2}$$

$$a_x = \frac{1}{2}\,\text{Spur}[\rho\,\sigma_x] = \frac{1}{2}\Big[\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\underbrace{\left(e^{i\phi} + e^{-i\phi}\right)}_{2\cos\phi} \Big] = \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\phi$$

$$= \frac{1}{2}\sin\theta\cos\phi$$

$$\Rightarrow \quad a_x = \frac{1}{2} n_x$$

$$a_y = \frac{1}{2}\,\text{Spur}[\rho\,\sigma_y] = \frac{1}{2}\Big[\sin\theta/2\,\cos\frac{\theta}{2}\,\underbrace{\frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{i}}_{2\sin\phi} \Big] = \frac{1}{2}\sin\theta \quad \phi$$

$$\Rightarrow \quad a_y = \frac{1}{2} n_y$$

$$a_z = \frac{1}{2}\,\text{Spur}\left[\rho\,\sigma_z\right] = \frac{1}{2}\left[\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right] = \frac{1}{2}\cos\theta = \frac{1}{2}\,n_z$$

Insgesamt haben wir :

$$\rho = \frac{1}{2}\,\mathbb{1} + \frac{1}{2}\,n_x\,\sigma_x + \frac{1}{2}\,n_y\,\sigma_y + \frac{1}{2}\,n_z\,\sigma_z = \frac{1}{2}\left[\mathbb{1} + \vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right]$$

b) Die direkte Rechnung der Spur gibt :

$$\text{Sp}\,\rho^2 = \text{Sp}\begin{pmatrix} \cos^4\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2} & // \\ // & \cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2} + \sin^4\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \cos^4\frac{\theta}{2} + 2\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2} + \sin^4\frac{\theta}{2} = \left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2 = 1$$

Das ist immer der Fall, wenn ρ einen reinen Zustand entspricht

Mann kann direkt in der Eigen Basis arbeiten und

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Sp}\,\rho^2 = 1$$

c) Im Fall eines Spins, der einer gemischten Gesamtheit von Spins angehört, hat der Dichte-Operator ρ noch die folgenden allgemeinen Eigenschaften.

- ρ ist eine hermitische 2×2 Matrix

- $Spur[\rho] = 1$

- Seine Eigenwerte $\lambda_1 = p \geq 0$; $\lambda_2 = 1-p \geq 0$ entsprechen Wahrscheinlichkeiten das Spin ~~im~~ Zustand $+\hbar/2$ oder $-\hbar/2$ zu finden.
  ρ ist positiv definit.

Deswegen kann man ρ immer schreiben wie

$$\rho = a_0 \mathbb{1} + \vec{a}\cdot\vec{\sigma} \quad , \text{ wobei } \quad a_0 = \frac{1}{2} Spur[\rho] = 1/2$$

$$= \frac{1}{2}\mathbb{1} + \vec{a}\cdot\vec{\sigma} = \frac{1}{2}\left[\mathbb{1} + \vec{q}\cdot\vec{\sigma}\right] \quad , \text{ wobei wir } \vec{q} = \frac{\vec{a}}{2} \text{ definieren}$$

Aber welche Eigenschaften hat der $\vec{q}$ Vektor nun?

Wir können, z.B., die Determinante von ρ berechnen

$$\det\hat{\rho} = \det\left[\frac{1}{2}\mathbb{1}\right] + \det\left[\frac{1}{2}\vec{q}\cdot\vec{\sigma}\right] = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\det\left[q_x\sigma_x + q_y\sigma_y + q_z\sigma_z\right]$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(q_x^2 \det\sigma_x + q_y^2 \det\sigma_y + q_z^2 \det\sigma_z\right) =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(q_x^2 + q_y^2 + q_z^2\right) = \frac{1}{4}\left(1 - |\vec{q}|^2\right)$$

Deswegen $\quad 0 \leq \det\rho = \frac{1}{4}\left(1 - |\vec{q}|^2\right) \leq \frac{1}{4} \implies \boxed{|\vec{q}| \leq 1}$

Beachte, dass $|\vec{q}| = 1$ wenn ϱ einem reinen Zustand entspricht. (z.B. wie vorher wenn $\vec{q} = \hat{n}$, mit $|\hat{n}| = 1$)

Wir können nun die Spur von ϱ^2 berechnen

$$\varrho^2 = \frac{1}{2}\left[\mathbb{1} + \vec{q}\cdot\vec{\sigma}\right] \times \frac{1}{2}\left[\mathbb{1} + \vec{q}\cdot\vec{\sigma}\right] = \frac{1}{4}\left[\mathbb{1} + \vec{q}\cdot\vec{\sigma}\right]\left[\mathbb{1} + \vec{q}\cdot\vec{\sigma}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\mathbb{1} + 2\vec{q}\cdot\vec{\sigma} + (\vec{q}\cdot\vec{\sigma})^2\right]$$

wobei $(\vec{q}\cdot\vec{\sigma})^2 = (q_x\sigma_x + q_y\sigma_y + q_z\sigma_z)^2 =$

$$= q_x^2\sigma_x^2 + q_y^2\sigma_y^2 + q_z^2\sigma_z^2 + q_x q_y \sigma_x\sigma_y + \dots$$

Es ist einfach zu sehen, dass $\mathrm{Spur}[\sigma_i]$ und $\mathrm{Spur}[\sigma_i\sigma_j]$ mit $i \neq j$ identisch null sind.

Man kann auch einfach sehen, dass $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \mathbb{1}$

Deswegen

$$\mathrm{Spur}[\varrho^2] = \mathrm{Spur}\left[\frac{1}{4}\mathbb{1}\right] + \mathrm{Spur}\left[\frac{1}{4}(q_x^2+q_y^2+q_z^2)\mathbb{1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + |\vec{q}|\right)$$

wobei $0 \leq |\vec{q}| \leq 1$ (und $=1$ nur wenn $\hat{\varrho}$ einem reinen Zustand entspricht).

d) Der Spin-Hamilton-Operator des Problems läßt sich schreiben als

$$H = \mu_B \vec{B}\vec{\sigma} = \mu_B B \sigma_x = \hbar\omega_L \sigma_x \quad \left(\text{wobei wir } \omega_L = \frac{\mu_B B}{\hbar} \text{ definiert haben}\right)$$

Der Anfangszustand ist definiert durch

$$\hat{\rho}(0) = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\mathbb{1} - \frac{1}{4}\sigma_z = \frac{1}{2}\left[\mathbb{1} - \frac{1}{2}\sigma_z\right]$$

Die Zeitentwicklung des Dichte-Operators $\rho(t)$ wurde gegeben von

$$\rho(t) = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} \rho(0)\, e^{\frac{iHt}{\hbar}} = e^{-i\omega_L t\sigma_x} \rho(0)\, e^{i\omega_L t\sigma_x}$$

$$= e^{-i\omega_L t\sigma_x} \frac{1}{2}\left[\mathbb{1} - \frac{1}{2}\sigma_z\right] e^{i\omega_L t\sigma_x} = \frac{1}{2}\mathbb{1} - \frac{1}{4} e^{-i\omega_L t\sigma_x} \sigma_z\, e^{i\omega_L t\sigma_x}$$

Wir können den lezten Beitrag als Funktion der Kommutatoren zwischen σ_x, σ_z schreiben, und zwar können wir benutzen

$$e^{\lambda\hat{B}} \hat{A}\, e^{-\lambda\hat{B}} = \hat{A} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}[\hat{B},\hat{A}]_{(n)} \quad \text{wobei} \begin{cases} [\hat{B},\hat{A}]_n = [B,[B,A]_{n-1}] \\ [\hat{B},\hat{A}]_1 = [\hat{B},\hat{A}] \end{cases}$$

In unserem Falle, $\hat{B} = \sigma_x$, $\lambda = -i\omega_L t$; $\hat{A} = \sigma_z$

$$\rho(t) = \frac{1}{2}\mathbb{1} - \frac{1}{4}\sigma_z - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-i\omega_L t)^n}{n!}[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_z]_{(n)}$$

Die Rechnung der Kommutatoren $[\sigma_x, \sigma_z]_{(n)}$ gibt unterschiedliche Ergebnisse wenn n gerade/ungerade ist

$$\begin{cases} [\sigma_x, \sigma_z]_{2n} = + \sigma_z 2^{2n} \\ [\sigma_x, \sigma_z]_{2n+1} = -i \sigma_y 2^{2n+1} \end{cases}$$

Wir haben deswegen

$$\rho(t) = \frac{1}{2}\mathbb{1} - \frac{1}{4}\sigma_z - \frac{1}{4}\sigma_z \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{2n} \frac{(-i\omega_L t)^{2n}}{2n!} + \frac{i}{4}\sigma_y \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i\omega_L t)^{2n+1}}{(2n+1)!} 2^{2n+1}$$

$$= \frac{1}{2}\mathbb{1} - \frac{1}{4}\sigma_z \left(1 - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2\omega_L t)^{2n}}{2n!}\right) + \frac{1}{4}\sigma_y \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2\omega_L t)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \frac{1}{2}\mathbb{1} - \frac{1}{4}\sigma_z \cos(2\omega_L t) + \frac{1}{4}\sigma_y \sin 2\omega_L t$$

Der Erwartungswert als Funktion der Zeit wird gerechnet, als

$$\langle S_z \rangle(t) = \mathrm{Spur}(\rho(t) S_z) = \frac{1}{4}\frac{\hbar}{2}\mathrm{Spur}(\rho(t)\sigma_z)$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{\hbar}{2}\mathrm{Spur}(\sigma_z^2)\cos 2\omega_L t$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{\hbar}{\cancel{2}}\cancel{2}\cos 2\omega_L t = -\frac{\hbar}{4}\cos 2\omega_L t$$

$$= -\frac{\hbar}{4}\cos 2\omega_L t$$

Aufgabe 14) "No Cloning Theorem"

Wenn wir das Skalarprodukt $\langle\psi|_1 \langle\psi|_2 \, |\varphi\rangle_1 |\varphi_2\rangle$ rechnen, bekommen wir

$$\langle\psi|_1 \langle\psi|_2 \; |\varphi\rangle_1 |\varphi_2\rangle = \langle\psi|_1 \langle\chi|_2 \, \underbrace{U^\dagger \, U}_{= \mathbb{1}} \, |\varphi\rangle_1 |\chi\rangle_2$$

$$= {}_1\langle\psi|\varphi\rangle_1$$

Es gilt auch ${}_2\langle\psi|\varphi\rangle_2 = {}_1\langle\psi|\varphi\rangle_1$, deswegen haben wir

$$\left({}_1\langle\psi|\varphi\rangle_1\right)^2 = {}_1\langle\psi|\varphi\rangle_1 \,, \quad \text{das impliziert} \quad {}_1\langle\psi|\varphi\rangle_1 = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

Deswegen müssen die beiden zu klonenden Zustände entweder <u>identisch</u> oder <u>orthogonal</u> zueinander sein, im Widerspruch zum Ansatz, dass U jeden Zustand klont.

Man kann demnach zwar eine orthogonale Basis von Zuständen klonen, nicht aber eine Linearkombination daraus.
Das dies nicht geht, folgt schon aus der Linearität der Produktzustände in jedem der beiden Faktoren.

Aus den obigen Formeln würde für den Gesamtzustand aus Originalspin und geklontem Spin folgen:

$$U\left(\alpha|\psi\rangle_1 + \beta|\varphi\rangle_1\right)|\chi\rangle_2 = \alpha|\psi_1\rangle|\psi_2\rangle + \beta|\varphi\rangle_1|\varphi_2\rangle$$

anstatt

$$\left(\alpha|\psi\rangle_1 + \beta|\varphi\rangle_1\right)\left(\alpha|\psi\rangle_2 + \beta|\varphi\rangle_2\right) = \alpha^2|\psi\rangle_1|\;\rangle_2 + \beta^2|\varphi\rangle_1|\varphi\rangle_2 + \alpha\beta\left(|\psi\rangle_1|\varphi\rangle_2 + |\varphi\rangle_1|\psi\right.$$