Aufgabe 15.) "Born sche Nährung"

a) Ausführung der Integrationen gibt:

$$\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d\vec{r}\,\frac{V(r)}{r}\,e^{i(kr+\vec{k}\cdot\vec{r})} = \frac{m}{\hbar^2\,\cancel{2\pi}}\int_0^{+\infty} dr\, r V(r)\underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{=2\pi}\int_0^{\theta}\sin\theta\, d\theta\, e^{ikr(1+\cos\theta)}$$

$\vec{k}\cdot\vec{r} = kr\cos\theta$

$$= \frac{m}{\hbar^2}\int_0^{+\infty} dr\, r\, V(r)\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\, e^{ikr(1+\cos\theta)} = -\frac{m}{\hbar^2}\int_0^{\infty} dr\, rV(r)\int_1^{-1} dy\, e^{ikr(1+y)}$$

$$= \frac{m}{\hbar^2}\int_0^{+\infty} dr\, r\, V(r)\, e^{ikr}\left.\frac{e^{ikry}}{ikr}\right|_{-1}^{1} = \frac{m}{i\hbar^2 k}\int_0^{+\infty} dr\, V(r)\,\cdot\left(e^{2ikr}-1\right)$$

In unserem Fall $V(r) = V_0 e^{-r/r_0}$ $\Rightarrow$ $\left|\frac{2mV_0}{\hbar^2}\cdot\frac{r_0^2}{1-2ikr_0}\right|$

Deswegen $\left|\frac{2mV_0}{\hbar^2}\,\frac{r_0^2}{1-2ikr_0}\right| \ll 1$

d.h. $\left|2\,\frac{mr_0^2V_0}{\hbar^2}\,\frac{1+2ikr_0}{1+4k^2r_0^2}\right| = 2\,\frac{mr_0^2V_0}{\hbar^2}\,\frac{1}{\sqrt{1+4r_0^2k^2}} \ll 1$

$\Rightarrow \boxed{\frac{\hbar^2}{mr_0^2V_0} \gg \frac{1}{\sqrt{1+4k^2r_0^2}}}$

Bemerkungen: hier ist $\frac{\hbar^2}{mr_0^2V_0}$ ein dimensionsl. Maß für die Stärke und die Reichweite des Potentials $V(r)$; die Energieabhängigkeit steckt im Produkt kr_0 in der Funktion auf den rechten Seite. Diese Funktion von kr_0 fällt monoton ab und verschwinden für $kr_0 \to +\infty$

Deswegen: Bornsche Nährung ANWENDBAR
- auch bei kleinen Energie für genügend schwaches bzw kurzreichweitiges Potential
- auf jeden Fall aber bei genügend hoher Energie

b) Die Streuamplitude in erster Bornschen Näherung läßt sich schreiben als

$$f(\theta,\phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d\vec{r}\, V(\vec{r})\, e^{i\vec{q}\vec{r}} = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\tilde{V}(\vec{q}) ,$$

wobei $|\vec{q}| = q = |\vec{k}-\vec{k}'| = 2k\sin\theta/2$

Für Zentralpotentiale (wie in unserem Fall) ist

$$\tilde{V}(q) = \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{(2\pi)} \int_0^{+\infty} dr\, r^2 V(r) \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta\, e^{iqr\cos\theta} = \frac{4\pi}{q}\int_0^{+\infty} dr\, r\, V(r)\sin(qr)$$

Mit der expliziten Ausdrück unseres Potential, bekommen wir

$$\tilde{V}(q) = V_0 \frac{4\pi}{q^3}\int_0^{+\infty} dy\, y \sin y\, e^{-y/qr_0} = V_0\, 4\pi r_0^3 \times \frac{2}{[1+(q r_0)^2]^2}$$

$$\left[\text{Hinweis für das Integral } \int_0^{+\infty} dy \underbrace{y}_{A(y)} \underbrace{\sin y\, e^{-y/q_0 r_0}}_{B'(y)} = \cancel{A(y)B(y)}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \underbrace{A'(y)}_{1} B(y)\, dy \ldots \right]$$

Deswegen, bekommen wir

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta,\cancel{\phi})|^2 = \left(\frac{2m V_0 r_0^3}{\hbar^2}\right)^2 \times \frac{4}{[1+(q r_0)^2]^4}$$

nicht ϕ-abhängig!

Zur Berechnung des totalen Streuquerschnitts integriere gemäß

$q^2 = 2k^2(1-\cos\theta) \Rightarrow q\,dq = -k^2\, d(\cos\theta)$. Deswegen $\int d\Omega = 2\pi\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\ldots$

$$= \frac{2\pi}{k^2}\int_0^{2k} q\,dq \ldots = \frac{2\pi}{k^2 r_0^2}\int_0^{2kr_0} x\,dx \qquad \text{wobei } x \equiv q r_0$$

Das Integral läßt sich schreiben, als

$$\sigma_{TOT} = \int d\Omega \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \frac{2\pi}{r_0^2 k^2} \int_0^{2kr_0} dx \left(\frac{2m V_0 r_0^3}{\hbar^2}\right)^2 \frac{4}{(1+x^2)^4} = 2\pi \left(\frac{2m V_0 r_0^2}{\hbar^2}\right)^2 \int_0^{2kr_0} \frac{4\,dx}{(1+x^2)^4}$$

$$= 2\pi \left(\frac{2m V_0 r_0^2}{\hbar^2 k}\right) \times \frac{2}{3} \frac{x^2(3+3x^2+x^4)}{(1+x^2)^3}\Bigg|_{x=2kr_0}$$

Aufgabe 16.) "Streuung an einem Topf-Potential"

a) Die Schrödingergleichung ist

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})\right] u(\vec{r}) = E\, u(\vec{r})$$

wenn $V(\vec{r}) = V(r)$ (zentrales Potential) $\Rightarrow$ $[H, L_z] = 0$; $[H, L^2] = 0$

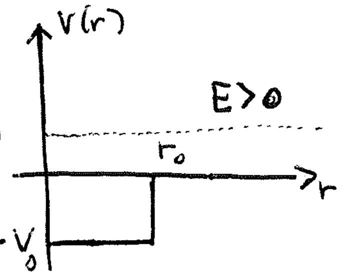
$\Rightarrow$ Separationansatz $u(\vec{r}) = R_\ell(r)\, Y_\ell^m(\vartheta, \phi)$

mit der folgenden Radialgleichung:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - V(r)\right]\right] R_\ell(r) = 0$$

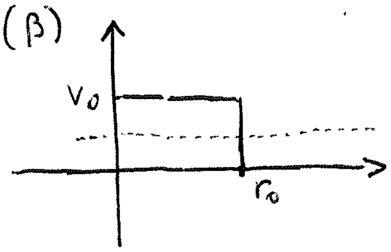
wobei, in unserem Fall:

(α) (ungebundene Zustände)



und

(β)



$0 < E < V_0$

Wir betrachten nur die Lösung mit $\ell = 0$, deswegen

für $r < r_0$

(α) $\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + K^2\right] R_0(r) = 0$ mit $K^2 = \sqrt{\frac{2m(V_0+E)}{\hbar^2}}$ und $E > 0$

(β) $\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \kappa^2\right] R_0(r) = 0$ mit $\kappa^2 = \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$ mit $0 < E < V_0$

für $r > r_0$ (α) und (β) $\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + k^2\right] R_0(r) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\alpha) & E > 0 \Rightarrow 0 < k < +\infty \quad \text{mit} \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad (E>0) \\ (\beta) & 0 < E < V_0 \Rightarrow 0 < k < \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}} \end{cases}$$

Die Lösung zu "testen" ist folgende

$$\begin{cases} R_0(r) \propto j_0(kr) = \frac{\sin kr}{kr} & (\alpha) \quad r < r_0 \\ R_0(r) \propto j_0(-ikr) = \frac{\sin(-ikr)}{-ikr} & (\beta) \quad r < r_0 \end{cases}$$

$R_0(r) \propto \cos\delta_0(k) j_0(kr) + \sin\delta_0(k) n_0(kr)$ (α), (β) für $r > r_0$

und wir haben

$$\frac{d}{d\rho} j_0(\rho) = -\rho^{-2}\sin\rho + \frac{\cos\rho}{\rho} = -\rho^{-1} j_0(\rho) + n_0(\rho)$$

$$\frac{d}{d\rho} n_0(\rho) = -\rho^{-2}\cos\rho - \rho^{-1}\sin\rho = -\rho^{-1} n_0(\rho) - j_0(\rho)$$

und

$$\frac{d^2}{d\rho^2} j_0(\rho) = 2\rho^{-2} j_0(\rho) - 2\rho^{-1} n_0(\rho) - j_0(\rho)$$

$$\frac{d}{d\rho^2} n_0(\rho) = 2\rho^{-2} n_0(\rho) + 2\rho^{-1} j_0(\rho) - n_0(\rho)$$

So für $r < r_0$ mit $\rho = kr$ (α) und $\rho = -ikr$ (β)

$$\left[\frac{d}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d}{d\rho} + 1\right] j_0(\rho) = 0 \Leftrightarrow \cancel{2\rho^{-2} j_0(\rho)} - \cancel{2\rho^{-1} n_0(\rho)} - \cancel{j_0(\rho)} - \cancel{2\rho^{-2} j_0(\rho)} + \cancel{2\rho^{-1} n_0(\rho)} + \cancel{j_0(\rho)} = 0 \quad \checkmark$$

<u>Bemerkungen</u>: Mit dieser Lösung wurde bereits berücksichtigt, dass für $r < r_0$ die für $r = 0$ singuläre Basis-lösung $n_0(kr)$ bzw $n_0(ikr)$ auszuschießen ist.

für $r > r_0$

Zwei unabhängige Lösungen sind möglich, und zwar mit $\rho = Kr$

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d}{d\rho} + 1\right] j_0(\rho) = 0 \; ; \; \left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d}{d\rho} + 1\right] n_0(\rho) = 0$$

(jetzt ist auch die Lösung $n_0(\rho)$ akzeptabel : $r > r_0$)

Die allgemeinste Lösung ist eine Linearkombination der $j_0(\rho)$ und $n_0(\rho)$, die man ohne Einschränkung der Allgemeinheit als $\underline{B_0 \cos\delta_0}$ und $\underline{B_0 \sin\delta_0}$ schreiben kann.

Die Phasenverschiebung $\delta_0(k)$ ist von den Stetigkeitbedingungen für $R_0(r)$ an der Stelle $r = r_0$ definiert:

$$\begin{cases} R_0(r_0^-) = R_0(r_0^+) \\ R_0'(r_0^-) = R_0'(r_0^+) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\alpha) \quad A_0\, j_0(Kr_0) = B_0\left[\cos\delta_0\, j_0(kr_0) + \sin\delta_0\, n_0(kr_0)\right] \\ \quad\;\; A_0 \frac{d}{dr} j_0(Kr_0) = B_0\left[\cos\delta_0 \frac{d}{dr} j_0(kr_0) + \sin\delta_0 \frac{d}{dr} n_0(kr_0)\right] \end{cases}$$

(β) wie (α) aber $K \to iK$

Das Verhältnis dieser Gleichungen liefert

$$\frac{\frac{d}{dr} j_0(Kr_0)}{j_0(Kr_0)} = \frac{\cos\delta_0 \frac{d}{dr} j_0(kr) + \sin\delta_0 \frac{d}{dr} n_0(r)}{\cos\delta_0\, j_0(kr) + \sin\delta_0\, n_0(kr)}$$

und (β) wie (α) mit $K \to iK$

die die Rechnung der Phasenverschiebung δ_0 erlaubt.

b)

Die explizite Rechnung der Stetigkeitbedienung in unseren Fälle liefert

$$(\alpha)\quad K\cot[Kr_0] - \cancel{\frac{1}{r_0}} = k\cot[kr_0+\delta_0] - \cancel{\frac{1}{r_0}}$$

$$(\beta)\quad \kappa\coth[\kappa r_0] - \cancel{\frac{1}{r_0}} = k\cot[kr_0+\delta_0] - \cancel{\frac{1}{r_0}}$$

Somit ist δ_0 (modulo π) durch:

$$(\alpha)\qquad \delta_0(k) = -kr_0 + \arctan\left[\frac{k}{K}\tan Kr_0\right]$$

$$(\beta)\qquad \delta_0(k) = -kr_0 + \arctan\left[\frac{k}{\kappa}\tanh(\kappa r_0)\right]$$

c) Die totale Streunquerschnitt als Funktion von δ_0 läßt sich schreiben als

$$\sigma_{TOT} = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta_0$$

In unseren zwei Fälle; bekommen wir

$$(\alpha)\quad \sigma_{TOT} = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\left[\arctan\left[\left(\frac{k}{K}\right)\tan Kr_0\right] - kr_0\right] \qquad \text{mit } K = \sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}}$$

$$(\beta)\quad \sigma_{TOT} = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\left[\arctan\left[\frac{k}{\kappa}\tanh\kappa r_0\right] - kr_0\right] \qquad \text{mit } \kappa = \sqrt{\frac{2m(|V_0|-E)}{\hbar^2}}$$

17.) "Über die Lippmann-Schwinger Gleichung"

a) Ausgangspunkt:

$$|\psi_k^\pm\rangle = |\vec{k}\rangle + G_0^\pm(k)\,U\,|\psi_k^\pm\rangle$$

$$\langle\vec{r}|\psi_k^\pm\rangle = \langle\vec{r}|\vec{k}\rangle + \langle\vec{r}|G_0^\pm\cdot U|\psi_k^\pm\rangle$$

Wir fügen eine vollständige $\mathbb{1}$ hinter $G_0^\pm$ und hinter U ein. Damit ergibt sich:

$$\psi^\pm(\vec{k},\vec{r}) = \Phi(\vec{k},\vec{r}) + \int d\vec{r}\,'\int d\vec{r}\,''\langle\vec{r}|G_0^\pm|\vec{r}\,'\rangle\langle\vec{r}\,'|U|\vec{r}\,''\rangle\langle\vec{r}\,''|\psi_k^\pm\rangle$$

$$= \Phi(k,\vec{r}) + \int d\vec{r}\,'\int d\vec{r}\,''\, G_0^\pm(\vec{k},\vec{r},\vec{r}\,')\,U(\vec{r}\,')\,\delta(\vec{r}\,'-\vec{r}\,'')\,\psi^\pm(k,\vec{r}\,'')$$

Deswegen

$$\psi^\pm(\vec{k},\vec{r}) = \Phi(k,\vec{r}) + \int d\vec{r}\,'\, G^\pm(\vec{k},\vec{r},\vec{r}\,')\,U(\vec{r}\,')\,\psi^\pm(k,\vec{r}\,'),$$

wobei $G_0^\pm = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|r-r'|} \xrightarrow[|\vec{r}-\vec{r}\,'|\sim r-\hat{r}\cdot\vec{r}\,']{r\gg\infty} -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{\mp ik\hat{r}\vec{r}\,'}\cdot e^{\pm ikr}}{r}$

$$\psi^\pm(\vec{k},r) = \Phi(k,\vec{r}) - \frac{1}{4\pi}e^{\pm ikr}\int d\vec{r}\,'\,e^{\mp i\vec{k}\cdot\vec{r}\,'}\,U(\vec{r}\,')\,\psi^\pm(k,\vec{r}\,')$$

b) Ausgangspunkt: $\left[\nabla^2 + k^2\right] G_0(k, \vec{R}) = \delta(\vec{R})$

Nach Fouriertransformation:

$$\left(-K^2 + k^2\right) \tilde{G}_0(k, \vec{K}) = 1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{G}_0(k, \vec{K}) = \frac{1}{k^2 - K^2}$$

$\tilde{G}_0(k, \vec{K})$ hat Pole auf der reellen Achse ($K = \pm k$), deswegen muss man die Pole mit $\pm i\epsilon$ verschieben

$$\tilde{G}^{\pm} = \frac{1}{k^2 - K^2 \pm i\epsilon}$$

"+" = Retardiert
"−" = Advanziert

Wenn wir nun die anti Fouriertransformierte Funktion rechnen,

$$G_0^{(\pm)}(k, \vec{R}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{K} \frac{e^{i\vec{K}\cdot\vec{R}}}{k^2 - K^2 \pm i\epsilon} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} K^2 dK \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \frac{e^{iKR\cos\theta}}{k^2 - K^2 \pm i\epsilon} =$$

$$= \frac{1}{8\pi^2 iR} \int_{-\infty}^{+\infty} K dK \frac{e^{iKR} - e^{-iKR}}{k^2 - K^2 \pm i\epsilon}$$

Das Integrand ist gerade in $K \to -K$

Mit der Partialbruchzerlegung

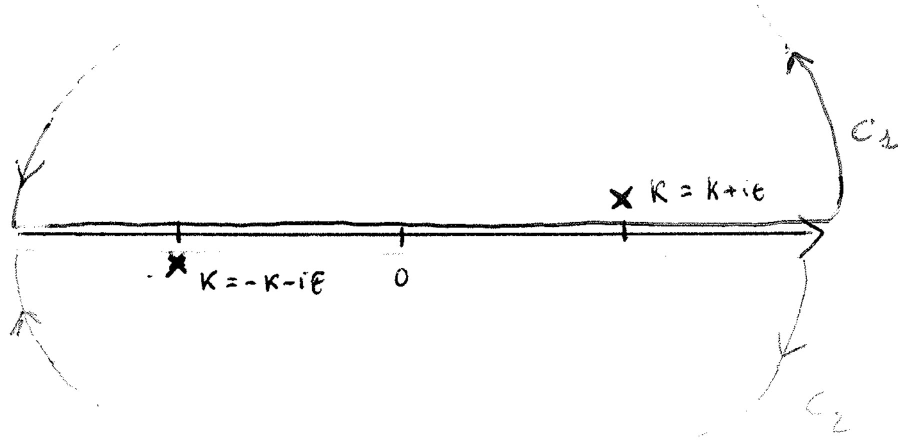
$$\frac{1}{k^2 - K^2} = \left[\frac{1}{K - k} + \frac{1}{K + k}\right]\left(-\frac{1}{2K}\right)$$

Können wir das Integral so umschreiben:

$$G_0(k, R) = \frac{i}{16\pi^2 R}\left(J_1 - J_2\right), \quad \text{wobei} \quad \begin{cases} J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dK\, e^{iKR}\left(\frac{1}{K-k} + \frac{1}{K+k}\right) \\ J_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dK\, e^{-iKR}\left(\frac{1}{K-k} + \frac{1}{K+k}\right) \end{cases}$$

Die Pole sind in $K = \pm(k+i\epsilon)$ (oder $\pm(k-i\epsilon)$)

. Im erste Fall (retardierte Green Funktion)



kann man den Pfad des Integrals J_1 über C_1 schliessen (das Integral auf C_1 ist null wegen e^{iKe}), und den Pfad des J_2 über C_2 schliessen (das Integral auf C_2 ist nulle wegen e^{-iKR}).

Deswegen
$$\begin{cases} J_1 = 2\pi i\, e^{ikR} & (\text{der einzige Pole ist } K = k+i\epsilon) \\ J_2 = -2\pi i\, e^{+ikR} & (\text{" " " ist } K = -k-i\epsilon) \end{cases}$$

Mit einen ähnlichen Rechnung für $K = \pm(k-i\epsilon)$ bekommen wir das finale Ergebniss, und zwar

$$G_0^{\pm}(k, \vec{R}) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{\pm ikR}}{R}$$