18) Kontinuierliche Transformationsgruppe

a) Wir können ~~den~~ Vektor $\vec{a}$ in n Vektoren $\vec{\epsilon} = \frac{\vec{a}}{n}$ teilen

Wenn n groß genug ist, ($|\vec{\epsilon}|$ klein ~~genug~~ ist), haben wir

$$T(\vec{\epsilon})\psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r}-\vec{\epsilon}) \hat{=} \psi(\vec{r}) - \vec{\nabla}\psi(\vec{r})\cdot\vec{\epsilon} = \psi(\vec{r}) - \frac{i\,\vec{p}\cdot\vec{a}}{\hbar n}\psi(\vec{r})$$

Wenn wir n-mal den Translationsoperator $T(\vec{\epsilon})$ betrachten

$$T(\vec{a})\psi(\vec{r}) = \underbrace{T(\vec{\epsilon})T(\vec{\epsilon})\cdots T(\vec{\epsilon})}_{n\text{-mal}}\psi(\vec{r}) =$$

$$= \left(\mathbb{1} - \frac{i\vec{p}\cdot\vec{a}}{\hbar n}\right)\left(\mathbb{1} - \frac{i\vec{p}\cdot\vec{a}}{\hbar n}\right)\cdots\left(\mathbb{1} - \frac{i\vec{p}\cdot\vec{a}}{\hbar n}\right)\psi(\vec{r})$$

$$= \left(\mathbb{1} - \frac{i\vec{p}\cdot\vec{a}}{\hbar} + \dots + \left(\frac{i\vec{p}\vec{a}}{\hbar}\right)^m \frac{n!}{(n-m)!\,m!}\,\frac{1}{n^m} + \dots\right)\psi(\vec{r})$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{wenn } n \text{ groß ist}}}{\cong} \left(\mathbb{1} - \frac{i\vec{p}\vec{a}}{\hbar} + \dots + \frac{1}{m!}\left(\frac{i\vec{p}\vec{a}}{\hbar}\right)^m + \dots\right)\psi(\vec{r})$$

$\Downarrow$ m-ten Beitrag

$$T(\vec{a})\psi(\vec{r}) = e^{-\frac{i\vec{p}\vec{a}}{\hbar}}\psi(\vec{r})$$

b) Mit dieser Definition, werden alle Eigenschaften einer Gruppe erhalten:

i) <u>Assoziativität</u>: $T(\vec{a})T(\vec{b}+\vec{c}) = T(\vec{a}+\vec{b})T(\vec{c})$ } durch eine direkte Ersetzung

ii) <u>Kommutativität</u>: $T(\vec{a})T(\vec{b}) = T(\vec{b})T(\vec{a})$

iii) <u>neutrales Element</u> $\exists\, T(0)$ (Es ist $\mathbb{1}$)

iv) <u>inverses</u> ~~Element~~ $\exists\, T^{-1}(\vec{a})$ $\qquad T^{-1}(\vec{a}) = T(-\vec{a}) = e^{\frac{i\vec{p}\vec{a}}{\hbar}}$

(Bemerke, dass $T^{-1}(\vec{a}) = T^{+}(\vec{a})$!)

19.) "Kontinuitätsgleichung

a) Ausgangpunkt ist die Klein-Gordon Gleichung:

$$\left(\Box + K_c^2\right)\phi(\vec{r},t) = 0 \quad , \text{ wobei } \Box = \partial_\mu \partial^\mu = -\nabla^2 + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$\text{und } K_c = \frac{mc}{\hbar}$$

Wir multiplizieren diese Gleichung und ihre Komplex Konjugierte mit ϕ^* (ϕ), und bekommen

$$\begin{cases} \phi^* \Box \phi = -K_c^2 \phi^*\phi \\ \phi \Box \phi^* = -K_c^2 \phi^*\phi \end{cases} \Rightarrow \quad \phi^* \Box \phi - \phi \Box \phi^* = 0$$

$$\left(\text{d.h. } \phi^*\partial_\mu\partial^\mu\phi - \phi\partial_\mu\partial^\mu\phi^* = 0\right)$$

Durch Addition und Subtraktion von einem gemischten Betrag $\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi$ bekommt man

$$\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi^* + \phi^*\partial_\mu\partial^\mu\phi - \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial_\mu\partial^\mu\phi^* = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\partial_\mu\left[\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*\right] = 0$$

Wenn man die Gleichung mit $\frac{i\hbar}{2m}$ multipliziert, und die Summe über μ explizit schreibt, bekommt man

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left[\frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\phi^*\frac{\partial}{\partial t}\phi - \phi\frac{\partial}{\partial t}\phi^*\right)\right]}_{\rho} + \operatorname{div}\underbrace{\left[\frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right)\right]}_{\vec{j}} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \operatorname{div}\vec{j} = 0$$

b) Die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left[\psi^* \frac{\partial}{\partial t}\psi - \psi \frac{\partial}{\partial t}\psi^*\right]$ ist jedoch nicht positiv definiert.

Die Lösungen der Klein-Gordon Gleichung lassen sich schreiben als

$$\psi(\vec{r},t) \propto e^{-\frac{i}{\hbar}(Et + \vec{p}\cdot\vec{x})} \quad \text{wobei } E = \pm\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

Deswegen man hat

$$\rho \propto \frac{E}{2mc^2}$$, die ist vom Vorzeichen von E abhängig.

c)

Wir können direkt den Wahrscheinlichkeitstrom herleiten aus:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r},t) \qquad \left(\text{wobei } \rho(\vec{r},t) = \psi^*(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t) = \sum_{i=1}^{4} \psi_i^*(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)\right)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) = i\hbar\left[\psi^+ \frac{\partial}{\partial t}\psi + \left(\frac{\partial}{\partial t}\psi^+\right)\psi\right]$$

wobei die Zeitableitungen durch die Dirac Gleichung ersetzt werden können

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) = \psi^+\left[c\vec{\alpha}\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + \beta mc^2\right]\psi - \left[\left(c\vec{\alpha}\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + \beta mc^2\right)\psi\right]^+\psi$$

$$= \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\left(\psi^+ c\,\vec{\alpha}\,\psi\right) = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\cdot\vec{j}$$

20.) "Diskrete Symmetriegruppen"

a) Betrachten wir den typischen nicht-relativistischen Hamilton-Operator:

$$H = -\frac{\hbar^2 \vec{\nabla}^2}{2m} + V(x)$$

Dann $CH = H^* C = HC$, deswegen gilt $CH = HC$

und $[H, C] = 0$

b) $H \psi_n(\vec{r}) = E_n \psi_n(\vec{r})$

$C \psi(\vec{r}) = \psi^*(\vec{r})$, deswegen müssen die Eigenvektoren von C entweder rein reel (Eigenwerte +1) oder rein imaginär (Eigenwerte −1) sein

Deswegen ist die gemeinsame Eigenbasis von C und H gegeben als

$$\begin{cases} \psi_{nR} = \psi_n(\vec{r}) + \psi_n^*(\vec{r}) \\ \psi_{nI} = \psi_n(\vec{r}) - \psi_n^*(\vec{r}) \end{cases}$$

(wenn $\psi_n(\vec{r})$ Eigenzustand von H ist, ist auch $\psi_n^*(\vec{r})$ Eigenzustand)

c) Nein - Der Hamilton-Operator mit elektromagnetischen Feld kann durch die "Minimale Substitution" $(-i\hbar\nabla \Rightarrow -i\hbar\vec{\nabla} - q/c\,\vec{A})$ geschrieben werden als

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + \hat{V}(x), \quad \text{wobei } \hat{V}(x) = V(x) + q\varphi(x)$$

mit q = elektrische Ladung

Deswegen, ist es nun nicht mehr wahr dass

$$C H C^{-1} = H^* = H \quad \Rightarrow \quad [C, H] \neq 0$$

d) Seien $|\varphi_\pi\rangle$ die Eigenvektoren des Paritäts-Operators

$$P|\varphi_\pi\rangle = p|\varphi_\pi\rangle$$

$$P^2|\varphi_\pi\rangle = p^2|\varphi_\pi\rangle = |\varphi_\pi\rangle, \text{ weil } P^2 = \mathbb{1}$$

$$\Rightarrow \quad p^2 = 1 \Rightarrow p = \pm 1 \quad \text{(zwei mögliche Eigenwerte)}$$

Von einem beliebigen Zustand $\psi(\vec{r})$, kann man die korrespondierenden Eigenvektoren von P aufbauen, als

$$\varphi_+(\vec{r}) = \psi(\vec{r}) + \psi(-\vec{r}) \quad \text{mit } p = 1$$

$$\varphi_-(\vec{r}) = \psi(\vec{r}) - \psi(-\vec{r}) \quad \text{mit } p = -1$$

Deswegen, wenn $[H, P] = 0$, $H\psi_n(\vec{r}) = E_n\psi(\vec{r}) \Rightarrow$ $H\psi_n(-\vec{r}) = E_n\psi_n(-\vec{r})$. Die gemeinsame Eigenbasis von H und P läßt sich schreiben als

$$\psi_{p=\pm 1} = \psi_n(\vec{r}) \pm \psi_n(-r) \quad \text{mit Eigenwerten } E_n,\ p = \pm 1$$

Bemerke dass wenn $\psi_n(\vec{r})$ schon Eigenzustand von P ist, eine der zwei Kombinationen null wird.