21.) "Symmetrisierende / Antisymmetrisierende Projektoren"

a)

Betrachte einen N-Teilchen Zustand $|\psi_N\rangle = |1\rangle_1 |2\rangle_2 \cdots |N\rangle_N$

Die direkte Anwendung von S definiert den symmetrisierten Zustand

$$|s\rangle = S|\psi\rangle_N = \frac{1}{N!}\Big(\underbrace{|1\rangle_1|2\rangle_2 \cdots |N\rangle_N + |2\rangle_1|1\rangle_2 \cdots |N\rangle_N + \cdots}_{N!\ \text{Permutationen}}\Big)$$

Wir können nur den Effekt des S^2 berechnen:

$$S^2|\psi_N\rangle = S(S|\psi_N\rangle) = S|s\rangle = \frac{1}{N!}\Big(S(|1\rangle_1|2\rangle_2 \cdots |N\rangle_N) + S(|2\rangle_1|1\rangle_2 \cdots |N\rangle_N) + \cdots$$

Der Effekt des S Operators (der alle möglichen Permutationen aufbaut) ist gleich für jeden Beitrag in Klammer (das finale Ergebnis ist immer $|s\rangle$) deswegen

$$S^2|\psi_N\rangle = \frac{1}{N!}\Big(\underbrace{|s\rangle + |s\rangle + \cdots |s\rangle}_{N!\ \text{Beiträge}}\Big) = |s\rangle = S|\psi\rangle_N$$

$$\Rightarrow \boxed{S^2 = S}$$

Eine ähnlicher Beweis gilt für den Antisymmetrisierenden-Operator

$$\underset{\text{Antisymmetrisierter Zustand}}{|a\rangle} = A|\psi\rangle_N = \frac{1}{N!}\Big(\underbrace{|1\rangle_1|2\rangle_2 \cdots |N\rangle_N - |2\rangle_1|1\rangle_2 \cdots |N\rangle_N + \cdots}_{N!\ \text{Permutationen}}\Big)$$

$$A^2|\psi_N\rangle = A(A|\psi_N\rangle) = \frac{1}{N!}\Big(A|1\rangle_1|2\rangle_2 \cdots |N\rangle_N - A|2\rangle_1|1\rangle_2 \cdots |N\rangle_N + \cdots\Big)$$

Es ist klar, dass die Anwendung von A auf den ersten Beitrag wieder $|a\rangle$ gibt.

Das gleiche passiert aber auch für allen anderen Beiträge in der Summe, z.B. dem zweiten

$$-A\,|2\rangle_1|1\rangle_2|\cdots|N\rangle_N = -\frac{1}{N!}\left(|2\rangle_1|1\rangle_2\cdots|N\rangle - |1\rangle_1|2\rangle\cdots|N\rangle + \cdots\right)$$
$$= -(-|a\rangle) = |a\rangle$$

weil die Beitrege mit einem − Vorzeichen aus ungeraden Permutationen kommen und eine zweite Anwendung des A Operators das Vorzeichen wieder nach + wechselt.

$$A^2|\psi_N\rangle = \frac{1}{N!}\Big(\underbrace{|a\rangle + |a\rangle + \cdots}_{N!\ \text{mal}}\Big) = |a\rangle = A|\psi_N\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{A^2 = A}$$

22.) "Zwei und drei identische Teilchen"

a) Zwei Elektronen

Spin = $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ Im Spinraum $|S_z = \pm\frac{1}{2}\rangle = |\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$

Mögliche Eigenwerte : (Einzelteilchen Eigenwerte $e_0 = \hbar\omega$, $e_1 = \hbar\omega$, $e_2 = 2\hbar\omega$

	Teilchen 1	Teilchen 2	
Grundzustand	0	0	$\Rightarrow E_0 = 0$
I Anregung	$\hbar\omega$	0	$\Rightarrow E_1 = \hbar\omega$
	0	$\hbar\omega$	
II Anregung	$\hbar\omega$	$\hbar\omega$	$\Rightarrow E_2 = 2\hbar\omega$
	$2\hbar\omega$	0	
	0	$2\hbar\omega$	
III Anregung	$\hbar\omega$	$2\hbar\omega$	$\Rightarrow E_3 = 3\hbar\omega$
	$2\hbar\omega$	$\hbar\omega$	
	$2\hbar\omega$	$2\hbar\omega$	$\Rightarrow E_4 = 4\hbar\omega$

Anregung

Eigenvektoren :

Für ein fermionisches/bosonisches System sind nur antisimmetrisierte/symmetrisierte Eigenvektoren

Man kann diese Kombinationen mit der Hilfe der A und S Projektoren bezeichnen:

• Zwei Elektronen System

Die Anwendung von $\mathcal{A}$ ist formell äquivalent zu der Berechnung einer Determinante ("Slater Determinante"):

• E_0
$= e_0 + e_0$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} |e_0\uparrow\rangle_1 & |e_0\uparrow\rangle_2 \\ |e_0\downarrow\rangle_1 & |e_0\downarrow\rangle_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_0\uparrow\rangle_1 |e_0\downarrow\rangle_2 - |e_0\downarrow\rangle_1 |e_0\uparrow\rangle_2\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} |e_0\rangle_1 |e_0\rangle_2 \left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

$\Downarrow$ Die Wurzel kommt von der Normierung

Nicht Entartet

• E_1
$= e_1 + e_0$
$(e_0 + e_1)$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} |e_1\uparrow\rangle_1 & |e_1\uparrow\rangle_2 \\ |e_0\uparrow\rangle_1 & |e_0\uparrow\rangle_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_1\rangle_1 |e_0\rangle_2 - |e_0\rangle |e_1\rangle\right)|\uparrow\uparrow\rangle$$

oder
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} |e_1\downarrow\rangle_1 & |e_1\downarrow\rangle_2 \\ |e_0\downarrow\rangle_1 & |e_0\downarrow\rangle_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_1\rangle_1 |e_0\rangle_2 - |e_0\rangle_1 |e_1\rangle_2\right)|\downarrow\downarrow\rangle$$

oder
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} |e_1\uparrow\rangle_1 & |e_1\uparrow\rangle_2 \\ |e_0\downarrow\rangle_1 & |e_0\downarrow\rangle_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_1\uparrow\rangle_1 |e_0\downarrow\rangle_2 - |e_0\downarrow\rangle_1 |e_1\uparrow\rangle_2\right)$$

oder
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} |e_1\downarrow\rangle_1 & |e_1\downarrow\rangle_2 \\ |e_0\uparrow\rangle_1 & |e_0\uparrow\rangle_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_1\downarrow\rangle_1 |e_0\uparrow\rangle_2 - |e_0\uparrow\rangle_1 |e_1\downarrow\rangle_2\right)$$

Entartung: 4.

• E_2 Für den Fall $e_1 + e_1$ haben wir das Gleiche wie für $e_0 + e_0$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} |e_1\rangle_1 |e_1\rangle_2 \left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

Der Fall mit $e_2 + e_0$ $(e_0 + e_2)$ ist äquivalent zu $e_1 + e_0$, deswegen

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_2\rangle_1 |e_0\rangle - |e_0\rangle |e_2\rangle\right)|\uparrow\uparrow\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_2\rangle_1 |e_0\rangle_2 - |e_0\rangle |e_2\rangle\right)|\downarrow\downarrow\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_2\uparrow\rangle |e_0\downarrow\rangle - |e_0\downarrow\rangle |e_2\uparrow\rangle\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_2\downarrow\rangle |e_0\uparrow\rangle - |e_0\uparrow\rangle |e_2\downarrow\rangle\right)$$

Entartung : 5

Sinngemäß bekommt man

- E_3

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_2\rangle_1 |e_1\rangle_2 - |e_1\rangle_1 |e_2\rangle_2\right)|\uparrow\uparrow\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_2\rangle_1 |e_1\rangle_2 - |e_2\rangle_2 |e_1\rangle_1\right)|\downarrow\downarrow\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_2\uparrow\rangle |e_1\downarrow\rangle - |e_1\downarrow\rangle |e_2\uparrow\rangle\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_2\downarrow\rangle |e_1\uparrow\rangle - |e_1\uparrow\rangle |e_2\downarrow\rangle\right)$$

Entartung : 4

- E_4

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_2\rangle_1 |e_2\rangle\right)\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

- Nicht Entartet

• Zwei Spin = 0 Bosonen

In diesem Fall sind nur symmetrische Eigenvektoren möglich
Ausserdem Spin = 0 $\Rightarrow$ Keine Spin Struktur

Deswegen, mit dem Hilfe des S-Projektors

• $E_0 \Rightarrow |e_0\rangle_1 |e_0\rangle_2$ Nicht Entartet

• $E_1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_1\rangle_1 |e_0\rangle_2 + |e_0\rangle_1 |e_1\rangle_2\right)$ Nicht Entartet

• $E_2 \Rightarrow \begin{cases} |e_1\rangle_1 |e_1\rangle_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_2\rangle_1 |e_0\rangle_2 + |e_0\rangle_2 |e_2\rangle_1\right) \end{cases}$ Entartung : 2

• $E_3 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_2\rangle_1 |e_1\rangle_2 + |e_1\rangle_1 |e_2\rangle_2\right)$ Nicht Entartet

• $E_4 \Rightarrow |e_2\rangle_1 |e_2\rangle_2$ Nicht entartet

b) Der zusätzliche Beitrag des Hamilton-Operators wirkt nicht in dem Fall der Spin = 0 Bosonen, deswegen bleibt die Eigenbasis unverändert

Für die zwei Elektronen man hat

$$H = -J\,\vec{S}(1)\cdot\vec{S}(2) = -\frac{J}{2}\left[S_{TOT}^2 - S^2(1) - S^2(2)\right] = -\frac{J}{2} S_{TOT}^2 + \cancel{const}$$

, wobei $\vec{S}_{TOT}^2 = \left(\vec{S}(1) + \vec{S}(2)\right)^2$

Wir müssen jetzt eine gemeinsame Basis für $H' = h(1) + h(2)$ und S_{TOT} suchen

Das ist relativ einfach, weil viele Eigenvektoren von H schon Eigenvektoren von $\mathbf{S}_{TOT}$ sind:

Alte Eigenwerte		Neue Eigenwerte

$$0 \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} |e_0\rangle|e_0\rangle \underbrace{\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)}_{|S_{TOT}=0\rangle} \qquad 0$$

$$\hbar\omega \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|e_1\rangle|e_0\rangle - |e_0\rangle|e_1\rangle\right) \underbrace{|\uparrow\uparrow\rangle}_{|S_{TOT}=1,\, S_z=1\rangle} \qquad \hbar\omega - J\hbar^2$$

$$\hbar\omega \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|e_1\rangle|e_0\rangle - |e_0\rangle|e_1\rangle\right) \underbrace{|\downarrow\downarrow\rangle}_{|S_{TOT}=1,\, S_z=-1\rangle} \qquad \hbar\omega - J\hbar^2$$

$$\hbar\omega \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|e_1\uparrow\rangle|e_0\downarrow\rangle - |e_0\downarrow\rangle|e_1\uparrow\rangle\right)$$

$$\hbar\omega \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|e_1\downarrow\rangle|e_0\uparrow\rangle - |e_0\uparrow\rangle|e_1\downarrow\rangle\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left(|e_1\rangle_1|e_0\rangle_2 + |e_0\rangle_1|e_1\rangle_2\right) \underbrace{\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right)}_{|S_{TOT}=1,\, S_z=0\rangle} & \hbar\omega - J\hbar^2 \\ \left(|e_1\rangle|e_0\rangle - |e_0\rangle|e_1\rangle\right) \underbrace{\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)}_{|S_{TOT}=0,\, S_z=0\rangle} & \hbar\omega \end{array} \right.$$

$$2\hbar\omega \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|e_1\rangle|e_1\rangle\right) \underbrace{\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)}_{|S_{TOT}=0,\, S_z=0\rangle} \qquad 2\hbar\omega$$

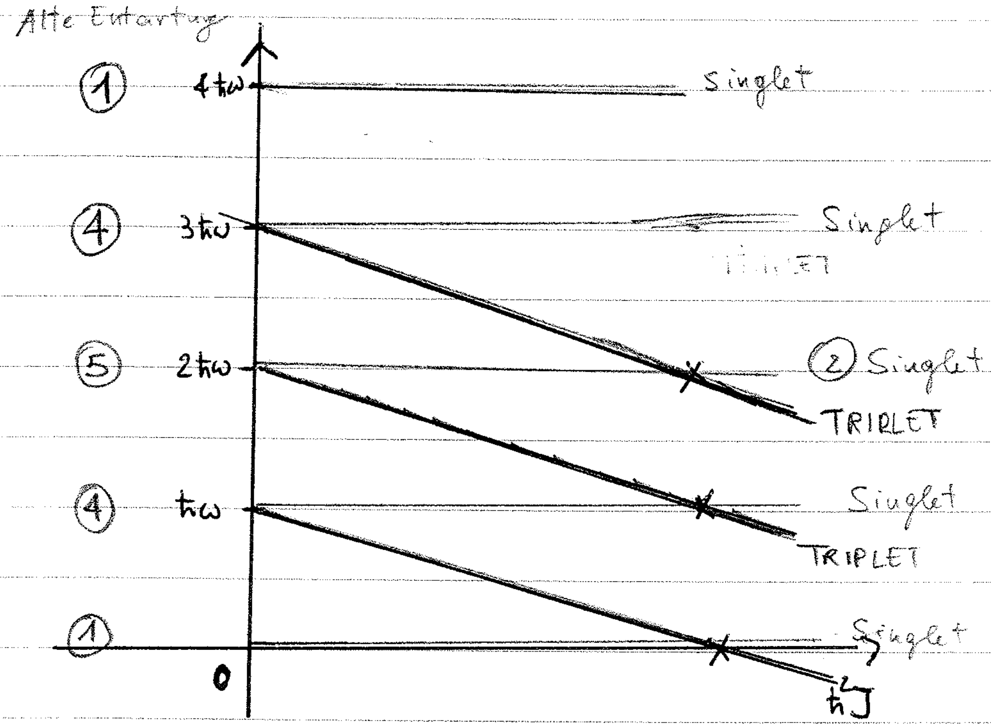
$$2\hbar\omega \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|e_2\rangle|e_0\rangle - |e_0\rangle|e_2\rangle\right) \left\{ \begin{array}{l} |\uparrow\uparrow\rangle \\ |\downarrow\downarrow\rangle \\ (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \end{array} \right. \quad \text{Triplett} \quad 2\hbar\omega - \hbar^2 J$$

$$2\hbar\omega \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|e_2\rangle|e_0\rangle + |e_0\rangle|e_2\rangle\right) \left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right) \quad \text{Singlett} \quad 2\hbar\omega$$

$3\hbar\omega \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_2\rangle|e_1\rangle - |e_1\rangle|e_2\rangle\right) \begin{cases} |\uparrow\uparrow\rangle \\ |\downarrow\downarrow\rangle \\ |\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle \end{cases} \qquad 3\hbar\omega - \hbar^2 J$

$3\hbar\omega \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_2\rangle|e_1\rangle + |e_1\rangle|e_2\rangle\right)\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right) \qquad 3\hbar\omega$

$4\hbar\omega \qquad |e_2\rangle|e_2\rangle\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right) \qquad 4\hbar\omega$



× Level Crossing (wenn $\hbar J^2 \sim \hbar\omega$)

c) Drei Bosonen mit Spin 0

In diesem Fall mussen wir den symmetrisierenden Operator für 3 Teilchen benutzen:

$$S = \frac{1}{3!}\sum_{n} P_n$$

Mögliche Eigenwerte / Eigenvektoren — Entartung

$e_0 \quad e_0 \quad e_0 \qquad 0 \qquad |e_0\rangle|e_0\rangle|e_0\rangle \qquad 1$

$$\left.\begin{matrix} e_1 & e_0 & e_0 \\ e_0 & e_1 & e_0 \\ e_0 & e_0 & e_1 \end{matrix}\right\} \quad \hbar\omega \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|e_1\rangle|e_0\rangle|e_0\rangle + |e_0\rangle|e_1\rangle|e_0\rangle + |e_0\rangle|e_0\rangle|e_1\rangle\right) \qquad 1$$

$$\left.\begin{matrix} e_2 & e_0 & e_0 \\ e_0 & e_2 & e_0 \\ e_0 & e_0 & e_2 \\ e_1 & e_1 & e_0 \\ e_1 & e_0 & e_1 \\ e_0 & e_1 & e_1 \end{matrix}\right\} \quad 2\hbar\omega \quad \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|e_2\rangle|e_0\rangle|e_0\rangle + |e_0\rangle|e_0\rangle|e_2\rangle + |e_0\rangle|e_2\rangle|e_0\rangle\right) \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|e_1\rangle|e_1\rangle|e_0\rangle + |e_1\rangle|e_0\rangle|e_1\rangle + |e_0\rangle|e_1\rangle|e_1\rangle\right) \end{cases} \qquad 2$$

$$\left.\begin{matrix} e_1 & e_1 & e_1 \\ e_2 & e_1 & e_0 \\ e_1 & e_2 & e_0 \\ e_1 & e_0 & e_2 \\ e_2 & e_0 & e_1 \\ e_0 & e_1 & e_2 \\ e_0 & e_2 & e_1 \end{matrix}\right\} \quad 3\hbar\omega \quad \begin{cases} |e_1\rangle|e_1\rangle|e_1\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{6}}\big(|e_0\rangle|e_1\rangle|e_2\rangle + |e_0\rangle|e_2\rangle|e_1\rangle + \\ \quad + |e_1\rangle|e_0\rangle|e_2\rangle + |e_1\rangle|e_2\rangle|e_0\rangle + \\ \quad + |e_2\rangle|e_1\rangle|e_0\rangle + |e_2\rangle|e_0\rangle|e_1\rangle\big) \end{cases} \qquad 2$$

$$\left.\begin{matrix} e_2 & e_2 & e_0 \\ e_0 & e_2 & e_2 \\ e_2 & e_0 & e_2 \end{matrix}\right\} \quad 4\hbar\omega \quad \frac{1}{3}\left(|e_2\rangle|e_2\rangle|e_0\rangle + |e_0\rangle|e_2\rangle|e_2\rangle + |e_2\rangle|e_0\rangle|e_2\rangle\right) \qquad 1$$

$$\left.\begin{matrix} e_2 & e_2 & e_1 \\ e_1 & e_2 & e_2 \\ e_2 & e_1 & e_2 \end{matrix}\right\} \quad 5\hbar\omega \quad \frac{1}{3}\Big(|e_1\rangle|e_2\rangle|e_2\rangle + |e_2\rangle|e_1\rangle|e_2\rangle + |e_2\rangle|e_2\rangle|e_1\rangle\Big) \quad 1$$

$$e_2 \quad e_2 \quad e_2 \quad \Rightarrow \quad 6\hbar\omega \quad |e_2\rangle|e_2\rangle|e_2\rangle \quad 1$$

23.) Lösung der (freien) Dirac und Weyl Gleichung

a) Ausgangspunkt: Dirac Gleichung ohne Wechselwirkung:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi(\vec r, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} - m\psi \right] = 0$$

wobei $\psi(r,t)$ ein 4er-Spinor ist.

Die allgemeine Ebene-Wellen Lösung für einen 4er-Spinor läßt sich schreiben als

$$\psi_p = \frac{1}{\sqrt{2E_p}}\, u_p\, e^{-iE_p t + i\vec p\cdot\vec r}$$

, wobei die Amplitude u_p des 4er-Spinors von der folgenden Gleichung definiert wird

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - m]\,\psi_p = 0 \quad \Rightarrow \quad [\gamma^\mu p_\mu - m]\, u_p\, e^{-iE_p t + i\vec p\cdot\vec r} = 0$$

$$\Rightarrow [\gamma^\mu p_\mu - m]\, u(p) = 0 \quad \Rightarrow \quad [\gamma^0 E_p - \gamma^i p_i - m]\, u(p) = 0$$

die sich in der Pauli-Dirac Darstellung schreiben läßt als ...

$$\begin{pmatrix} E_p - m & -\vec\sigma\cdot\vec p \\ \vec\sigma\cdot\vec p & -E - m \end{pmatrix} u(p) = 0$$

Pauli Dirac Darstellung $\begin{cases} \gamma_0 = \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \\ \vec\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \vec\sigma \\ -\vec\sigma & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

Wir können nur die Amplitude des 4-er Spinor in zwei 2-Komponenten Spinors trennen, und zwar

$$u_p = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} E_p - m & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -E_p - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad (E_p - m)\varphi = \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,\chi \quad \text{oder} \quad \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,\varphi = (E_p + m)\chi$$

Bemerke, dass die zwei Formeln äquivalent sind:

$$\varphi = \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E_p - m}\chi \Rightarrow \left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E_p + m}\right)\varphi = \frac{(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})^2\,\chi}{(E_p - m)(E_p + m)} \quad ; \text{wobei } (\vec{p}\cdot\vec{\sigma})^2 = \vec{p}^{\,2}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E_p + m} = \frac{\vec{p}^{\,2}\chi}{(E_p - m)(E_p + m)} = \frac{\cancel{\vec{p}^{\,2}}\,\chi}{\underbrace{\cancel{E_p^2 - m^2}}_{\to\, p^2}} \Rightarrow \chi = \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E_p + m}\varphi \quad \checkmark$$

(Für jeden Lösung der Dirac Gleichung)

Das bedeutet, dass die Amplitude der Ebenen Wellen für alle Werte von $\vec{p}$ und E_p mit beliebigen φ und χ Spinoren geschrieben werden kann.

Deswegen, bekommt man 4 unabhängige Lösungen, und zwar mit $\varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\chi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Um die allgemeinste Lösung zu schreiben, bemerken wir dass

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{p} = p_x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + p_y \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + p_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}$$

Endlich, bekommen wir explizit

$$\psi_1(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E_p+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E_p+m} \end{pmatrix} e^{-iE_pt+i\vec{p}\cdot\vec{r}} ; \quad \psi_2(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E_p+m} \\ \frac{p_z}{E_p+m} \end{pmatrix} e^{-iE_pt+i\vec{p}\cdot\vec{r}}$$

mit $E_p > 0$

$$\psi_3(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E_p-m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E_p-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-iE_pt+i\vec{p}\cdot\vec{r}} ; \quad \psi_4(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{E_p-m} \\ \frac{-p_z}{E_p-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-iE_pt+i\vec{p}\cdot\vec{r}}$$

mit $E_p < 0$.

b) Den Unterschied zur allgemeinen Lösung der Dirac Gleichung kann mann einfacher verstehen, wenn man die Chirale (Weyl) Darstellung benutz, und zwar

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi + i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\psi = \beta m \psi \quad \Rightarrow$$

mit $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$ und $\beta = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$

Wenn wir wieder die Ebene-Welle Lösung betrachten,

$$\psi(\vec{r},t) = u_p \, e^{-iE_p t + i\vec{p}\cdot\vec{r}} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-iE_p t + i\vec{p}\cdot\vec{r}},$$

bekommen wir

$$[E_p \hat{\mathbb{1}} - \vec{\alpha}\vec{p}] = \beta m$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} E_p - \vec{\sigma}\vec{p} & 0 \\ 0 & E_p + \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (E_p - \vec{\sigma}\cdot\vec{p})\,\varphi = m\,\chi \\ (E_p + \vec{\sigma}\cdot\vec{p})\,\chi = m\,\varphi \end{cases}$$

Die Kopplung zwischen der zweier Spinoren kommt nur durch den Masse Beitrag

Für masselose Teilchen werden die Gleichungen für χ und φ ungekoppelt sein.

Weyl Gleichung
$$\begin{cases} (E_p - \vec{\sigma}\cdot\vec{p})\,\varphi = 0 & \varphi \text{ Links-Chiral Zustand} \\ (E_p + \vec{\sigma}\cdot\vec{p})\,\chi = 0 & \chi \text{ Rechts-Chiral Zustand} \end{cases}$$

Zwei unabhängige Lösungen für die 2-komponenten Spinoren φ und χ $\Rightarrow$ Vereinfachung der mathematischen Beschreibung.

Beispile:

1) Neutrinos (die fast $m=0$ haben ...)

$m=0 \Rightarrow$ Weyl Gleichung bleibt eine gute Nähruy

2) Hoch - Temperatur Suprealeitung

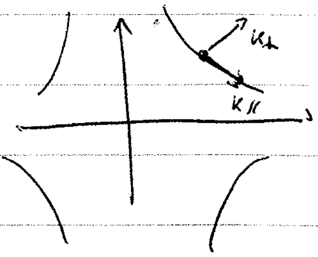
Das Supraleitende Gap ($\approx$ Energie um ein elektronische Paar zu binden) ist K-abhaingig

$\Rightarrow$ d-Wellen Symmetrie $\Delta_K = \Delta_0 (\cos k_x - \cos k_y)$

$$E_k = \pm\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_k^2} \simeq \pm \sqrt{v_F^2 K_\perp^2 + v_\Delta^2 K_\parallel^2}$$

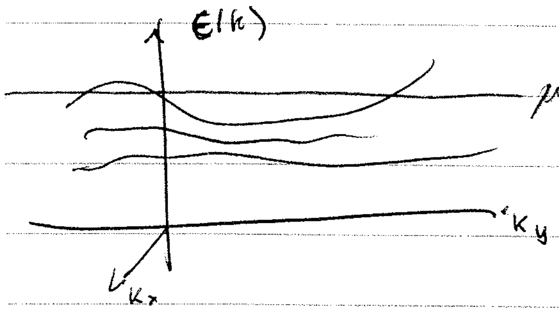
wo $\Delta_k \approx 0$ ist

$k_x = k_y$ (Noden)



$$E_k \simeq \pm p$$

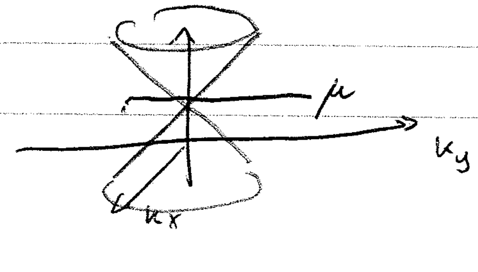
3) Band struktur in der Festkörperphysik



μ chemisches Potential

Eigenschaften des Feskkörper abhaingig von

Aber in Graphene (Eine einzele Schicht von Graphite)



so dass $E_K = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$

in der Nähe von E_F

c)

$$\mathcal{CPT} = \underbrace{i\gamma^2 K}_{\mathcal{C}}\,\underbrace{\gamma^0}_{\mathcal{P}}\,\underbrace{i\gamma^1\gamma^3 K}_{\mathcal{T}} \quad \text{mit } \vec{r} \to -\vec{r}, \quad t \to -t$$

$$= i^2 \gamma^2\gamma^0\gamma^1\gamma^3 \qquad (K^2 = \mathbb{1})$$

$$= -i^2 \gamma^0\gamma^2\gamma^1\gamma^3$$

$$= i^2 \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = i\,\underbrace{i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3}_{\gamma^5} = i\gamma^5$$

Die explizite Form der γ^5 ist folgende (in Dirac Darstellung)

$$\begin{array}{cccc} \gamma_0 & \gamma^1 & \gamma^2 & \gamma^3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ -\sigma_x & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ -\sigma_z & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & +\sigma_x \\ +\sigma_x & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sigma_y\sigma_z & 0 \\ 0 & -\sigma_y\sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_x\sigma_y\sigma_z \\ -\sigma_x\sigma_y\sigma_z & 0 \end{pmatrix}$$

, wobei $\sigma_x\sigma_y\sigma_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

$$= i\mathbb{1}$$

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

Vertauschung Teilchen $\leftrightarrow$ Antiteilchen