28) "Basiswechsel in zweiter Quantisierung"

a)

Aussgangspunkt ist die Vollständigkeitsrelation

$$|\beta\rangle = \sum_\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha|\beta\rangle \qquad \forall\, |\beta\rangle ,$$

Notation: $\begin{cases} |\alpha\rangle = |\varphi_\alpha\rangle = |0,0,\dots \overset{\alpha\text{-Zust.}}{1},0\dots \\ |\beta\rangle = |\varphi_\beta\rangle = |0,\dots \overset{\beta\text{-Zust.}}{1},0\dots \end{cases}$

wobei in Besetzungsdarstellung $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ definiert sind als

$$|\alpha\rangle = a_\alpha^\dagger|0\rangle \quad ; \quad |\beta\rangle = a_\beta^\dagger|0\rangle$$

Deswegen $\overset{\text{sind}}{\Rightarrow}$ $\quad a_\beta^\dagger|0\rangle = \sum_\alpha a_\alpha^\dagger|0\rangle\langle\alpha|\beta\rangle \qquad \forall\beta$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} a_\beta^\dagger &= \sum_\alpha \langle\alpha|\beta\rangle\, a_\alpha^\dagger \\ &\text{und seine adjungierte} \\ a_\beta &= \sum_\alpha \langle\beta|\alpha\rangle\, a_\alpha \end{aligned} \right\} \text{ gute "Kandidaten" für die Basiswechselrelationen}$$

Aber....

b) Erfüllen die so-definierten Operatoren $a_\beta^\dagger$, a_β die korrekten (Anti) vertauschungsrelationen?

Z.B. im bosonischen Fall, betrachten wir den Kommutator

$[a_{\tilde\beta}, a_\beta^\dagger]$, wobei $\begin{cases} a_{\tilde\beta} = \sum_{\tilde\alpha} \langle\tilde\beta|\tilde\alpha\rangle\, a_{\tilde\alpha} \\ a_\beta^\dagger = \sum_\alpha \langle\alpha|\beta\rangle\, a_\alpha^\dagger \end{cases}$

$$[a_{\tilde\beta}, a_\beta^\dagger] = \left(\sum_{\tilde\alpha} \langle\tilde\beta|\tilde\alpha\rangle\, a_{\tilde\alpha}\right)\left(\sum_\alpha \langle\alpha|\beta\rangle\, a_\alpha^\dagger\right) - \left(\sum_\alpha \langle\alpha|\beta\rangle a_\alpha^\dagger\right)\left(\sum_{\tilde\alpha}\langle\tilde\beta|\tilde\alpha\rangle\dots\right.$$

$$= \sum_\alpha\sum_{\tilde\alpha} \langle\tilde\beta|\tilde\alpha\rangle\langle\alpha|\beta\rangle \underbrace{\left(a_{\tilde\alpha}a_\alpha^\dagger - a_\alpha^\dagger a_{\tilde\alpha}\right)}_{[a_{\tilde\alpha}, a_\alpha^\dagger] = \delta_{\alpha,\alpha'}}$$

$$= \sum_{\alpha} \langle\tilde{\beta}|\alpha\rangle\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\tilde{\beta}|\beta\rangle = \delta_{\tilde{\beta}\beta}$$

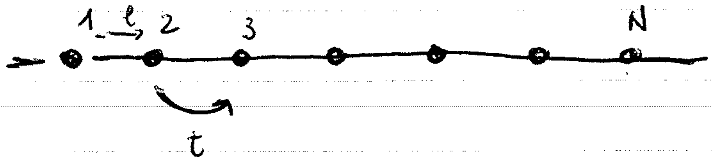
Deswegen $[a_{\tilde{\alpha}}, a^{+}_{\alpha}] = \delta_{\alpha\alpha'} \Longrightarrow [a_{\tilde{\beta}}, a^{+}_{\beta}] = \delta_{\beta\tilde{\beta}}$

Die Beziehugen für alle anderen Kommutatoren ergeben sich analog, ebenso die korrekten Antikommutatoren für Fermionen

c)

Aussgangspunkt Hubbard Hamilton-Operator mit $U=0$

$$H = -\sum_{ij} t_{ij}\, a_i^{+} a_j \qquad \left(\text{wobei } t_{ij} = \begin{cases} t & \text{wenn } j = i \pm 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\right)$$



mit, z.B. Periodischen Rahmbedienungen

$$e^{ikl} = e^{ikl(N+1)} \Rightarrow e^{iklN} = 1$$

Kann man direkt die Basiswechselsrelation anwenden $\left(k = \frac{2\pi}{lN} n \text{ mit } n = 0,1,\dots N-1\right)$

$$H = -\frac{1}{Nl}\sum_{ij}\sum_{kk'} t_{ij}\, e^{+ikx_i} e^{-ik'x_j}\, a_k^{+} a_{k'}$$

$$= -\frac{1}{Nl}\sum_{ij}\sum_{kk'} t_{ij}\, e^{+ikx_i} e^{-ik'x_i} e^{+ik'x_i} e^{-ik'x_j}\, a_k^{+} a_{k'}$$

$$= -\frac{1}{Nl}\sum_{kk'}\sum_{ij} e^{+i(k-k')x_i}\, T_{ij}\, e^{-ik'(x_j - x_i)}$$

, wobei $t_{ij} = t_{|i-j|} = \begin{cases} t & \text{wenn } i = j \pm 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Betrachten wir nur die Summe über j (für jeden i)

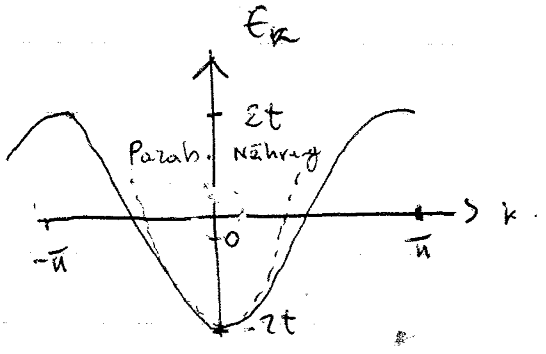
$$\sum_j t_{ij} e^{-ik'(x_j - x_i)} = t\left(e^{ik'\ell} + e^{-ik'\ell}\right) = 2t\cos(k'\ell)$$

Deswegen

$$H = -\sum_{kk'} \underbrace{\frac{1}{(N\ell)}\left(\sum_i e^{+i(k-k')x_i}\right)}_{\delta(k-k')} 2t\cos(k'\ell) a^+_{k'}a_{k'} = -\sum_k 2t\cos(k\ell) \underbrace{a^+_k a_k}_{n_k}$$

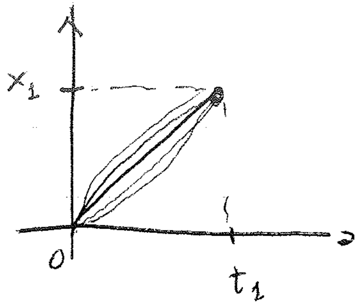
In $d = 2, 3 \ldots$ Dimensionen gilt die gleiche Herleitung für jede Richtung, deswegen man hat:

$$H = -\sum_{k_x, k_y, k_z} 2t\left(\cos(k_x\ell) + \cos(k_y\ell) + \cos(k_z\ell)\right) a^+_k a_k$$



29) "Pfadintegral für ein freies Teilchen"

a)



$$x_\epsilon(t) = x_1 \left(\frac{t}{t_1}\right)^{1+\epsilon}$$

- Freie Bewegung $\Rightarrow$ $V(x) = 0$

$$H = \frac{p^2}{2m} \quad ; \quad L = p\dot{x} - H(p,x)$$

$$\text{mit} \quad \dot{x} = +\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \Rightarrow L = m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$\left(= \frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)$$

$$x_\epsilon(t) = x_1 (t/t_1)^{1+\epsilon}$$

$$\dot{x}_\epsilon(t) = \frac{x_1}{t_1}(t/t_1)^{\epsilon}(1+\epsilon)$$

$$S_{(\epsilon)} = \int_0^{t_1} dt \; \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) = \int_0^{t_1} dt \; \frac{1}{2} m \frac{x_1^2}{t_1^2}\left(\frac{t}{t_1}\right)^{2\epsilon}(1+\epsilon)^2$$

$$= \frac{1}{2} m \frac{x_1^2}{t_1} \frac{(1+\epsilon)^2}{(2\epsilon+1)} \left(\frac{t}{t_1}\right)^{2\epsilon+1}\Bigg|_0^{t_1} = \frac{1}{2} m \frac{x_1^2}{t_1} \frac{(1+\epsilon)^2}{(2\epsilon+1)}$$

$$S(\epsilon) = \frac{1}{2} m \frac{x_1^2}{t_1} \left(\frac{(1+\epsilon)^2}{1+2\epsilon}\right) \Rightarrow \frac{1+2\epsilon+\epsilon^2}{1+2\epsilon} = 1 + \frac{\epsilon^2}{(1+2\epsilon)}$$

Minimum für $\epsilon = 0$ $\Rightarrow$ $S(\epsilon=0) = \frac{1}{2} m \frac{x_1^2}{t_1}$ (mit $\epsilon > -\frac{1}{2}$!)

$\Rightarrow$ Klassische Pfad

b)

$$\phi_\epsilon = \frac{S_\epsilon}{\hbar} = \frac{S^{class}_{\epsilon=0}}{\hbar} + \frac{1}{2} m \left(\frac{x_1^2}{t_1}\right) \frac{\epsilon^2}{\hbar(2\epsilon+1)}$$

$$= \phi_{cl} + \delta\phi_\epsilon$$

$$\delta\phi_\epsilon \leq \pi \Rightarrow \frac{1}{2} m \left(\frac{x_1}{t_1}\right)^2 \frac{\epsilon^2}{\hbar(2\epsilon+1)} \leq \pi$$

Betrachten wir hier $x_1 = t_1 = 1$

$$\Rightarrow \frac{\epsilon^2}{(2\epsilon+1)} \leq \frac{2\pi}{m}\left(\frac{t_1}{x_1^2}\right)\hbar = \frac{2\pi}{m[g]} \times 10^{-2}$$

$$\frac{\epsilon^2}{(2\epsilon+1)} = \lambda \quad , \text{wobei} \quad \lambda = \frac{2\pi}{m[g]} \times 10^{-27}$$

Max. Werte

$$\epsilon^2 = \lambda(1+2\epsilon) \Rightarrow \epsilon^2 - 2\lambda\epsilon - \lambda = 0 \Rightarrow \epsilon_{+,-} = \lambda \pm \sqrt{\lambda^2+\lambda}$$

wenn $m = 1g \Rightarrow \lambda \approx 10^{-27} \ll 1$ $\quad \epsilon_{+,-} \approx \sqrt{\lambda} \approx 10^{-13}$!

$\Rightarrow$ fast nur klassische Pfad erlaubt

wenn $m = 10^{-27} g \Rightarrow \lambda \approx 2\pi$

$$\epsilon_\pm = 2\pi \pm \sqrt{(2\pi)^2 + 2\pi} = \begin{cases} \epsilon_+ \approx 13 \\ \epsilon_- \approx -0.48 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ viele Pfäde möglich