IFP
TU Wien

Prof. Dr. K. Held
Dr. A. Toschi

Probeklausur zur Quantenmechanik II

Sommersemester 2009

keine Abgabe! – Besprechung direkt nach der Probeklausur am **Freitag**, **08.05.2009**

K1. Hermitesche und unitäre Operatoren

1+1+1+1=4 Punkte

Sei A ein linearer Operator, dann kann sein adjungierter Operator $A^\dagger$ folgendermaßen definiert werden

$$\int \phi(r)^* A^\dagger \psi(r)\, dr = \int (A\phi(r))^* \psi(r)\, dr$$

wobei $\psi(r)$ und $\phi(r)$ zwei beliebige Wellenfunktionen sind.

a) Beweise, dass

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

für alle Paare der linearen Operatoren A und B.

b) Seien A und B hermitesche Operatoren die nicht kommutieren. Welche der folgenden Operatoren sind hermitesch: i) AB, ii) $[A,B]$, iii) $AB+BA$, iv) ABA, v) A^n, wobei n eine positive ganze Zahl ist.

Sei U ein unitärer Operator, und $A' = UAU^\dagger$ mit A hermitesch. Zeige,

c) dass A' auch hermitesch ist, und dass die Eigenwerte von A' gleich den Eigenwerten von A sind,

d) dass $\langle\phi'|A'|\psi'\rangle = \langle\phi|A|\psi\rangle$, wobei $|\psi'\rangle = U|\psi\rangle$ und $|\phi'\rangle = U|\phi\rangle$.

K2. Zeitunabhängige Störungstheorie

4+1=5 Punkte

Betrachte einen eindimensionalen harmonischen Oszillator:

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}kx^2.$$

Der Hamilton Operator sei nun durch den zusätzlichen Beitrag $H_1 = \frac{1}{2}k'x^2$ (mit $k' \ll k$) gestört.

a) Berechne in erster und zweiter Ordnung Störungstheorie die Energie Korrekturen für das Spektrum von H_0.
(Erinnerung: Der Ortsraum-Operator X in der Eigenbasis $\{|n\rangle\}$ von H_0 laßt sich schreiben $X = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}(a+a^\dagger)$, wobei a, $a^\dagger$ der Vernichtungs- und Erzeugungsoperator sind, und $\alpha = \left(\frac{mk}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{4}}$.)

b) Vergleiche die Ergebnisse von **a)** mit der exakten Lösung des Problems.

K3. Ritzsches Variationsverfahren

4+3=7 Punkte

a) Berechne durch Änderung des reellen Parameters $a > 0$ in der Versuchswellenfunktion

$$\phi_0(x) = (a^2 - x^2) \text{ wenn } |x| < a \text{ und } \phi_0(x) = 0 \text{ sonst,} \tag{1}$$

eine obere Grenze der Energie für den Grundzustand des Hamilton Operators

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

b) Warum ist die Funktion $\phi_1(x) = x\,\phi_0(x)$ eine vernünftige Versuchswellenfunktion für den ersten angeregten Zustand? Berechne nun die Variationsabschätzung für die Energie dieses Zustands.

K4. Streutheorie

3+1=4 Punkte

a) Betrachte ein “deltaartiges” Potential $V(\vec{r}) = V_0\,\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$. Berechne den differentiellen $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ und den totalen σ_{tot} Streuquerschnitt für dieses Potential in erster Bornscher Nährung.

b) Gegeben sei ein System, in dem die Phasenveschiebung $\delta_l = 0$ für alle $l \geq 2$. Wie groß ist der maximal mögliche totale Streuquerschnitt? Für welche Werte von δ_0 und δ_1 wird er erreicht?