1. Tutorium - VU Quantentheorie 2 - 16.10.2009

1. In einem Experiment, das im Jahr 1982 durchgeführt wurde, gelang es erstmals die Impulsverteilung des Elektrons im Grundzustand des Wasserstoffatoms direkt zu messen. Dazu wurde ein hochenergetischer Strahl von Elektronen auf Wasserstoffatome gerichtet um diese zu ionisieren. Die gesuchte Impulsverteilung $|\langle\vec{p}\,|\psi\rangle|^2$ der *atomaren* Elektronen im Zustand H(1s) ist nun direkt proportional zum "differentiellen Streuquerschnitt" der *einfallenden* Elektronen welcher im Experiment unmittelbar zugänglich war (siehe Abb. 1).

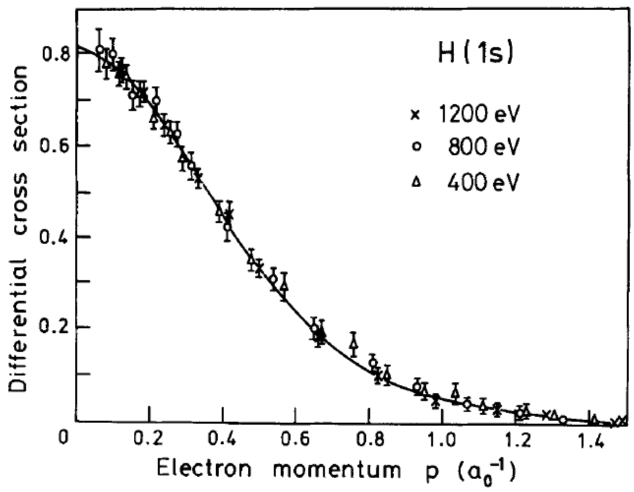

Abbildung 1: Impulsverteilung der Elektronen im Grundzustand des Wasserstoffatoms, gemessen durch Elektronenstrahlen mit verschiedenen Einfallsenergien [nach Weigold, AIP Conf. Proc. **86**, 1 (1982)].

   (a) Berechnen Sie die Impulsverteilung $|\langle\vec{p}\,|\psi\rangle|^2$. Wenn Ihr Ergebnis richtig ist, sollte es genau mit der durchgezogenen Linie in der Abbildung übereinstimmen. Wieso hängt Ihr Ergebnis offenbar nur vom Betrag des Impulses $|p|$ ab?

   (b) Nehmen Sie an, dass in einem zweiten Experiment anstatt der Wasserstoffatome einfach positiv geladene Helium-Atome (He^+) als Target für den Elektronenstrahl verwendet werden. Wie ändert sich die Impulsverteilung im entsprechenden Grundzustand des atomaren Elektrons im Vergleich zu (a)? Bringen Sie Ihr Ergebnis mit der Heisenbergschen Unschärferelation in Verbindung.

2. Betrachten Sie das Elektron eines Einelektronenatoms, das sich in einem angeregten Energie-Eigenzustand $|nl\frac{1}{2}jm_j\rangle$ mit den folgende Quantenzahlen befinde: $n = 4$, $l = 2$, $j = 3/2$, $m_j = 1/2$. (Quantenzahlen in Standardnotation aus der Atomphysik, $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$: Gesamtdrehimpuls.)

   (a) Wie groß ist der Erwartungswert für (i) die z-Komponente und für (ii) die x-Komponente des Spins $\vec{S}$ in diesem Zustand?

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden Sie bei einer Messung der y-Komponente des Spins den Messwert $-\hbar/2$ erhalten?

   Hinweis: Verwenden Sie die auf der Webseite der LVA zur Verfügung gestellte Tabelle für Clebsch-Gordan-Koeffizienten unter der folgenden URL: `www.quanten.at/quanten_2/links.html`

3. Gegeben sei der eindimensionale harmonische Oszillator, bestimmt durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2}\,. \tag{1}$$

   (a) Geben Sie die "Energie-Darstellung" (i) des Ortsoperators $\hat{x}$ und (ii) des Impulsoperators $\hat{p}$ an, indem Sie die entsprechenden Matrixelemente $\langle n|\hat{x}|m\rangle$ bzw. $\langle n|\hat{p}|m\rangle$ berechnen (es gilt $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$). Sind Ihre Matrizen hermitesch? Begründen Sie physikalisch warum alle Diagonalelemente der Matrizen verschwinden.

   (b) Zeigen Sie auf Basis der Ergebnisse aus (a), dass für den harmonischen Oszillator das "Ehrenfest-Theorem" gilt, wonach für einen beliebigen Zustand $|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n e^{-iE_n t/\hbar}|n\rangle$ die Erwartungswerte für Ort und Impuls die klassischen Bewegungsgleichungen erfüllen:

$$\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|\hat{x}|\psi(t)\rangle = \frac{1}{m}\langle\psi(t)|\hat{p}|\psi(t)\rangle\,, \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|\hat{p}|\psi(t)\rangle = -m\omega^2\langle\psi(t)|\hat{x}|\psi(t)\rangle\,. \tag{3}$$

   Hinweis: Siehe dazu auch das 11. Plenumsbsp. aus dem WS08/09: `http://www.quanten.at/quanten1_WS08/unterlagen27.pdf`