2. Tutorium - VU Quantentheorie 2 - 30.10.2009

1. Gegeben sei ein Gasdurchlauferhitzer, der durch einen defekten Luftabzug giftiges Kohlenmonoxid in eine Wohnung freisetzt. Beantworten Sie dazu folgende essentielle Fragen:

   (a) Betrachten Sie den Vibrationsfreiheitsgrad eines Kohlenmonoxid-Moleküls (andere Freiheitsgrade werden vernachlässigt). Wie groß ist der Erwartungswert der Vibrationsenergie des Moleküls bei einer Wohnungstemperatur von $T = 25°$ Celsius?

   (b) Welchen mittleren Anregungszustand (i.e., welche mittlere Energiequantenzahl n) erwarten Sie bei einer Messung des molekularen Vibrationszustands? Welche entsprechende Wellenlänge hat die Strahlung die beim Übergang von diesem mittleren Anregungszustand in den Grundzustand erzeugt werden würde?

   (c) Zeigen Sie, dass sich der Erwartungswert der Vibrationsenergie im klassischen Grenzfall (i.e., für große Temperaturen T) wie der Mittelwert der Energie des entsprechenden klassischen Systems verhält. Welches Ergebnis erhalten Sie im Grenzfall $T \to 0$?

   Hinweis: Verwenden Sie Ihr Wissen aus der Statistik 1 und Ihre Ergebnisse aus dem 8. Tutoriumsbeispiel der QTVU1, WS08/09 (sh. dazu: `http://www.quanten.at/quanten1_WS08/tutorium8.pdf`).

2. Ein Elektron befinde sich in einem zeitlich konstanten und homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\,\vec{e}_x$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür zum Zeitpunkt $t \geq 0$ bei einer Messung von S_z den Messwert $+\frac{\hbar}{2}$ zu erhalten, wenn das Elektron zum Zeitpunkt $t = 0$

   (a) durch das statistische Gemisch mit Dichteoperator

   $$\rho = p|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + (1-p)|\downarrow\rangle\langle\downarrow|\,, \quad p \in [0,1]$$

   (b) durch den reinen Zustand

   $$|\chi\rangle = \sqrt{p}|\uparrow\rangle + e^{i\delta}\sqrt{1-p}|\downarrow\rangle, \quad \delta \in [0, 2\pi), \quad p \in [0,1]$$

   beschrieben wird ($\sigma_z|\uparrow\rangle = +|\uparrow\rangle$, $\sigma_z|\downarrow\rangle = -|\downarrow\rangle$). Vergleichen Sie die unter (a) und (b) gefundenen Ergebnisse als Funktion der Relativphase δ und geben Sie deren Differenz eine physikalische Bedeutung.

3. Ein Ensemble von Teilchen mit Spin $s = \frac{1}{2}$ und Bahndrehimpulsquantenzahl $l = 1$ sei durch die Dichtematrix

$$\rho = \sum_{j,m_j} \left(\frac{j - m_j}{N} \right) |jm_j\rangle\langle jm_j|, \quad N \in \mathbb{R}^+$$

beschrieben. Dabei ist j die Gesamtdrehimpulsquantenzahl und m_j die dazugehörige magnetische Quantenzahl. Die Summe läuft über alle für $s = \frac{1}{2}, l = 1$ erlaubten Werte von j und m_j.

   (a) Bestimmen Sie die Normierungskonstante N.

   (b) Berechnen Sie den Erwartungswert (i) der z-Komponente und (ii) der x-Komponente des Spins in diesem Ensemble.

4. Betrachtet wird die eindimensionale Bewegung eines Teilchens der Masse m in einem homogenen Kraftfeld $V(x) = -K \cdot x$ $(K > 0)$.

   (a) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für die Operatoren $x_H(t)$, $p_H(t)$ der Orts- bzw. Impulsvariablen im Heisenbergbild (kanonische Bewegungsgleichungen).

   (b) Drücken Sie die Erwartungswerte der Orts- und Impulsvariablen zum Zeitpunkt t durch ihre Anfangswerte zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ und die Zeit t aus. Überprüfen Sie die Gültigkeit des Ehrenfest-Theorems durch einen Vergleich dieser Ergebnisse mit den klassischen Variablen $x(t)$, $p(t)$.

   (c) Berechnen Sie die Kommutatoren

$$[x_H(t_2), x_H(t_1)]\,, \; [p_H(t_2), p_H(t_1)]\,, \; [x_H(t_2), p_H(t_1)]\,.$$

(Schrödingerbild und Heisenbergbild sollen zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ zusammenfallen.)