4. Tutorium - VU Quantentheorie 2 - 27.11.2009

1. Das Valenzelektron eines Atoms werde durch Absorption eines Photons mit Wellenzahl $\vec{k}$ und mit Polarisationsvektor $\vec{e} \perp \vec{k}$ vom Zustand $|i\rangle \equiv |n\,l\,m_l\,s\,m_s\rangle$ in einen angeregten Zustand $|f\rangle \equiv |n'\,l'\,m_l'\,s\,m_s'\rangle$ gehoben. Nehmen Sie nun an, bei dem entsprechenden Anregungsprozess handle es sich um einen elektrischen Dipolübergang. In diesem Fall wird die Übergangswahrscheinlichkeit durch folgendes Matrixelement mit dem Dipoloperator $\vec{D}$ bestimmt: $|\langle f|\vec{e}\cdot\vec{D}|i\rangle|^2$. Zeigen Sie auf dieser Basis, dass für die in Frage kommenden Dipolübergänge folgende Auswahlregeln gelten: $\Delta l \equiv l' - l = \pm 1$, $\Delta m_l \equiv m_l' - m_l = 0, \pm 1$, $\Delta m_s \equiv m_s' - m_s = 0$. *Hinweis*: Verwenden Sie für Ihre Ableitung das Wigner-Eckhart-Theorem, sowie Überlegungen zur Parität der auftretenden Wellenfunktionen. Weiters gilt folgende Identität für das Skalarprodukt zweier Vektoroperatoren: $\vec{A}\cdot\vec{B} = \sum_{i=1}^{3} A_i B_i = \sum_{q=-1}^{1} (-1)^q A_q^1 B_{-q}^1$ (wobei A_q^1, B_q^1 die sphärischen Komponenten der Vektoroperatoren sind).

2. Beweisen Sie folgende Aussagen aus der Kernphysik:

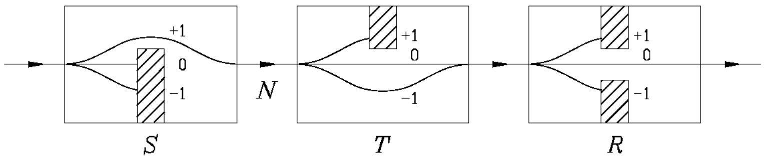
   (a) „Atomkerne haben keine statischen Dipolmomente.“ *Hinweis*: Gehen Sie von Zuständen des Atomkerns mit bestimmter Parität aus.

   (b) „Sphärische Atomkerne haben kein Quadrupolmoment Q_0^2.“ Überlegen Sie auch, wie Sie einen kugelrunden Atomkern deformieren müssen (unter Beibehaltung einer Zylindersymmetrie bzgl. der z-Achse), um für Q_0^2 positive bzw. negative Erwartungswerte zu erhalten. *Hinweis*: Verwenden Sie: $Q_0^2 = e(3z^2 - r^2)$.

   (c) „Atomkerne mit Gesamtdrehimpulsquantenzahl $J < 1$ haben kein Quadrupolmoment Q_0^2.“

   Anmerkung: Wie im Plenum besprochen, koppeln die elektrischen Quadrupolmomente an den Gradienten eines elektrischen Felds. Wir betrachten hier nur die Q_0^2-Komponente des Quadrupoltensors, weil in Experimenten mit einer Zylindersymmetrie bzgl. der z-Achse nur diese Komponente eine Rolle spielt.

3. Ein unpolarisierter Strahl von neutralen Spin-1 Teilchen falle in positiver y-Richtung auf die in der Abbildung dargestellte Anordnung



von gekoppelten Stern-Gerlach-Apparaten ein. Dabei besitze der Stern-Gerlach-Apparat S einen Feldgradienten in positive z-Richtung bzw. R einen Feldgradienten in positive x-Richtung. Der Feldgradient des dazwischenliegenden Spin-Filters T habe ebenfalls einen Feldgradienten in der xz-Ebene, der jedoch zwischen jenen von S und R variiert werden kann. Nehmen Sie nun an, dass N (Teilchen pro Sekunde) die Intensität des Strahls sei, welcher den S-Apparat verlässt. Wie muss nun der Feldgradient von T in der xz-Ebene gelegt werden, damit die Intensität des Strahls, welcher den R-Apparat verlässt, maximal wird? Wie groß ist diese maximale Intensität? *Hinweis*: Um die jeweiligen Wahrscheinlichkeitsamplituden in diesem Problem richtig zu kombinieren ist es wichtig zu beachten, welche Strahlteile durch eine Dichtematrix bzw. durch eine reine Gesamtheit beschrieben werden. Verwenden Sie zudem die Elemente der Drehmatrix (sh. Bsp. 4 aus dem vorigen Tutorium).

4. Ein Teilchen der Ladung q und der Masse m befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Potential eines harmonischen Oszillators, und sei im Eigenzustand des Vernichtungsoperators a zum Eigenwert $\alpha \in \mathbb{C}$. Zur Zeit $t > 0$ wirke auf das Teilchen nun zusätzlich ein elektrisches Feld $\varepsilon(t)$. Der Hamiltonoperator des Systems zu $t > 0$ ist

$$H(t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 - q\varepsilon(t)x \; . \tag{1}$$

   (a) Wie lautet die Bewegungsgleichung für den Vernichtungsoperator a_H im Heisenbergbild und die entsprechende Anfangsbedingung?

   (b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Heisenbergschen Bewegungsgleichung für a_H. *Hinweis*: Ein Ansatz für die spezielle Lösung der Differentialgleichung ist $a_H(t) = A(t)\, e^{-i\omega t}$ (vgl. Verfahren der Variation der Konstanten).

   (c) Berechnen Sie den Erwartungswert von x für einen Zeitpunkt $t \geq 0$ unter der Voraussetzung dass $\varepsilon(t) = \varepsilon_0\ \delta(t - t_0)$ und $t_0 > 0$. Skizzieren und diskutieren Sie Ihre Lösung für $\langle x \rangle_t$.