

## 6. Tutorium - VU Quantentheorie 2 - 15.01.2010

1. Der angeregte Elektronenzustand eines Natrium-Atoms habe eine Lebensdauer von 16ns, bevor er durch Emission eines Photons mit einer Wellenlänge von 590nm wieder in der Grundzustand übergeht. Schätzen Sie die Unschärfe in der Wellenlänge des emittierten Photons ab. Wie groß ist die räumliche Ausdehnung des Photons, wenn Sie dieses als Wellenpaket beschreiben, das sich mit der Lichtgeschwindigkeit ausbreitet?
2. Ein Teilchen der Ladung  $q$  befinde sich im Grundzustand des eindimensionalen harmonischen Oszillators mit Kreisfrequenz  $\omega$ . Berechnen Sie (in erster Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie) die Wahrscheinlichkeit  $W_n$ , mit der das Teilchen in den  $n$ -ten angeregten Oszillatorzustand übergeht, wenn der Oszillator durch einen Gauß-förmigen Laserpuls angestoßen wird. Das elektrische Feld des Laserpulses kann als räumlich homogen betrachtet werden und habe folgende zeitliche Abhängigkeit,

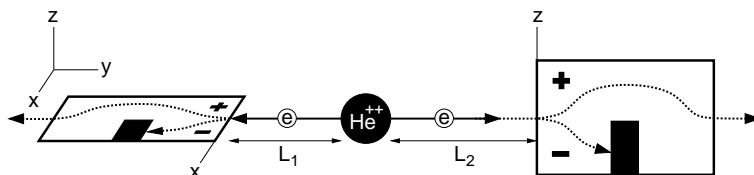
$$E(t) = \frac{A}{\tau_0\sqrt{\pi}} \exp(-t^2/\tau_0^2). \quad (1)$$

Lösen Sie die auftretenden Integrale rein analytisch und geben Sie eine Abschätzung für die Gültigkeit der störungstheoretischen Approximation an.

3. Um die Masse des Elektron-Antineutrinos  $\bar{\nu}_e$  zu bestimmen, betrachtet man im Experiment den Zerfall eines instabilen Tritium-Atoms, dessen Kernladung sich durch Beta-Zerfall plötzlich ändert,  ${}^3\text{H} \rightarrow {}^3\text{He}^+ + e^- + \bar{\nu}_e$ . Beantworten Sie zu diesem Experiment folgende Fragen:
  - (a) Schätzen Sie die klassischen Zeitskalen ab (i) mit der das Elektron im Grundzustand von  ${}^3\text{H}$  den Atomkern umrundet bzw. (ii) mit der das aus dem Kern emittierte Elektron die Elektronenhülle durchquert. Beurteilen Sie auf Basis Ihrer Abschätzung welche Näherung Sie für die Rechnung im Punkt (b) verwenden können.
  - (b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit  $W$  mit der das im Grundzustand befindliche Hüllenelektron des  ${}^3\text{H}$ -Atoms nach dem Zerfallsprozess im Grundzustand des  ${}^3\text{He}^+$ -Ions zu finden sein wird.

(Alle auftretenden Integrale sollen explizit berechnet werden, sodass Sie für die gefragte Übergangswahrscheinlichkeit  $W$  einen analytischen Ausdruck anschreiben können.)

4. Im Grundzustand des Heliumatoms befinden sich die beiden Elektronen in einem Singlett-Zustand mit Gesamtspin  $s = 0$ . Das Atom werde nun durch einen Laserpuls doppelt ionisiert, d.h. dass beide Elektronen durch die Energie des Laserpulses aus einem Bindungszustand in einen Kontinuumszustand gehoben werden und einen zweifach positiv geladenen Atomkern ( $\text{He}^{++}$ ) zurücklassen. Sie können nun annehmen, dass die beiden Elektronen nach dem Ionisierungsprozess weiterhin durch einen Singlett-Zustand beschrieben sind, selbst wenn sie nach der Emission in unterschiedliche Raumrichtungen eine große räumliche Distanz zueinander aufweisen.



- (a) Verwenden Sie eine Clebsch-Gordan-Tabelle um zu zeigen, wie sich der Singlett-Zustand  $|s = 0, m_s = 0\rangle$  in der Produktbasis der beiden Elektronen  $|s_1, m_{s,1}\rangle, |s_2, m_{s,2}\rangle$  anschreiben lässt. Handelt es sich bei dem Singlett-Zustand um einen "verschränkten Zustand"? (Verschränkte Zustände sind solche, die sich nicht als Produkte  $|s_1, m_{s,1}\rangle \otimes |s_2, m_{s,2}\rangle$  anschreiben lassen. Der Zustand eines verschränkten Teilchens lässt sich somit nicht unabhängig von den jeweiligen verschränkten Partnerteilchen beschreiben.)
- (b) Es werde nun zuerst an einem der beiden Elektronen der Wert  $\hbar/2$  für die Observable  $S_\alpha$  gemessen, wobei  $\alpha$  die Projektion des Spins auf die negative  $x$ -Richtung angibt (sh. obige Abbildung eines entsprechenden Stern-Gerlach-Apparats). Welches Ergebnis können Sie im Mittel für eine darauffolgende Messung (i) von  $S_z$  (ii) von  $S_x$  am zweiten Elektron erwarten?
- (c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit in beiden Stern-Gerlach-Filtern eine positive (+) Spin-Projektion zu messen, wenn die

beiden Achsen der Spin-Filter einen relativen Winkel von  $\theta$  zueinander aufweisen (in obiger Abbildung  $\theta = \pi/2$ .) Interpretieren Sie Ihre Resultate physikalisch.

*Bemerkung:* Ihre Ergebnisse in den obigen Punkten illustrieren mehrere der fundamentalen Eigenschaften der Quantentheorie: Dass durch den Kollaps der Wellenfunktion bei der Messung an einem der beiden Teilchen auch der Zustand des anderen Teilchens festgelegt wird - selbst wenn sich dieses räumlich weit entfernt aufhält - ist eine Konsequenz der quantenmechanischen "Nichtlokalität". Letztere folgt wiederum aus dem Superpositionsprinzip und der probabilistischen Naturbeschreibung durch die Quantentheorie. Der Umstand, dass der Messwert am zweiten Teilchen durch die Art der Messung am ersten Teilchen (wie z.B. die Projektionsachse bei der Spin-Messung) mitbeeinflusst wird, wird als "Quanten-Kontextualität" bezeichnet. Beide dieser Eigenschaften sind aus der klassischen Physik vollkommen unbekannt und haben bei der Entwicklung der Quantenmechanik zu zahlreichen Diskussionen geführt. Unter anderem wies z.B. Einstein darauf hin, dass die Korrelationen zwischen den beiden räumlich getrennten Elektronen nur durch eine "spukhafte Fernwirkung" erklärt werden können. Die daraus gezogene Schlussfolgerung, dass die Quantentheorie keine vollständige Theorie sei, sondern noch zusätzliche "verborgene Parameter" beinhalte, ließ sich jedoch mittlerweile im Experiment widerlegen. Was Einstein jedoch beruhigt haben dürfte, ist der Umstand dass durch die instantane "Fernwirkung" zwischen den beiden Elektronen keine Information übertragen werden kann und somit das Kausalitätsgesetz der speziellen Relativitätstheorie nicht verletzt wird.

**Alles Gute für 2010!**