Technische Universität Wien

Prof. Dr. K. Held
Dr. A. Toschi

1. Übung zur Quantenmechanik II

Sommersemester 2009

ABGABE: zu Dritt (ausnahmsweise zu 1,2 oder 4 Personen), **Freitag**, **13.03.2009**, zu Beginn der Übungstunde (Tutorium)

NOTE: 50% Klausur, 50% Übungen

1. Wiederh. QMI: Komposition zweier Drehimpulse *1+1+1=3 Punkte*

Der Hamiltonian eines Teilchens mit Spin $\frac{1}{2}$ und Masse m, das sich nur auf der Fläche einer Kugel mit Radius R bewegen kann, ist

$$H = \frac{L^2}{2mR^2} + \frac{2\omega}{\hbar}\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}.$$

wobei $\mathbf{L}$ und $\mathbf{S}$ die Orbital- und Spin-Drehimpulsoperatoren sind. Der Anfangszustand bei $t = 0$ wird von folgendem Spinor beschrieben:

$$\psi(t = 0) = Y_{1,0}(\theta, \phi)\chi_\uparrow$$

wobei wir die Standardnotation $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ für die Kugelflächenfunktionen, und $\chi_\uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ für den up-Spin benutzen.

a) Bestimme die Eigenbasis und die Eigenwerte von H.

b) Berechne die Zeitentwicklung des Zustands $\psi(t)$.

c) Berechne die Wahrscheinlichkeit als Funktion der Zeit, das Teilchen mit $S_z = -\frac{\hbar}{2}$ und mit $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ zu finden.

2. Zeitentwicklung eines Quantenzustands *2+1=3 Punkte*

Betrachte ein Zweiniveau-Quantensystem, definiert durch die Basis $\{|+\rangle, |-\rangle\}$. Der Hamiltonoperator läßt sich schreiben, als

$$H = \hbar\omega_1\Big(|+\rangle\langle+| \, + \, |-\rangle\langle-|\Big) + \hbar\omega_2\Big(|+\rangle\langle-| \, + \, |-\rangle\langle+|\Big),$$

wobei der zweite Term den Zustand von $|-\rangle$ nach $|+\rangle$ (und umgekehrt) flippt. Das System befindet sich zur Zeit $t = 0$ im $|\psi(t = 0)\rangle = |+\rangle$ Zustand.

a) Berechne die Zeitentwicklung des Zustands $|\psi(t)\rangle$, und die Mittelwerte der Energie des Systems als Funktion der Zeit.

b) Stelle nun das gleiche System in der Matrizendarstellung dar mit

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In dieser Darstellung wird folgender Operator definiert

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Berechne die Varianz des Operators A (d.h. $\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$) als Funktion der Zeit. Für welche Zeiten $t > 0$ ist der Zustand des Systems ein Eigenzustand des Operators A?

3. Schrödingergleichung in der Impulsdarstellung^v *1 Punkte*

Ausgangspunkt ist die Schrödingergleichung in der Impulsdarstellung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(p,t) = \frac{p^2}{2m} \phi(p,t) + \int \frac{dp'}{2\pi\hbar} \tilde{V}(p-p')\phi(p',t)$$

wobei $\tilde{V}(p)$ die Fourier Transformation des Potentials $V(x)$ ist.
Ersetze $\tilde{V}(p)$ durch $V(x)$ via Fourier Transformation und leite folgende gleichwertige Form des Schrödingergleichung im Impulsraum ab:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(p,t) = \left[\frac{p^2}{2m} + V\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \right) \right] \phi(p,t).$$

v = vorlesungsrelevant